Licence 3

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 20 juin 2016

durée 3h

****

Les calculatrices et les documents sont interdits.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1

1. Soit f une fonction mesurable, intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que

$$\int_{[0,1]} f(x)\, d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{]1/n,1]} f(x)\, d\lambda(x).$$

On rappellera précisément les hypothèses du théorème utilisé.

2. On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe une constante réelle γ telle que l'on ait le développement asymptotique lorsque n tend vers l'infini :

$$H_n = \log n + \gamma + o(1).$$

3. Pour x réel, on note $\{x\}$ l'unique réel de $[0,1[$ tel que $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'intégrale $\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\}\, d\lambda(x)$ a une valeur finie et que

$$\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\}\, d\lambda(x) = 1 - \gamma,$$

Exercice 2

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $s(x)$ le plus petit entier strictement supérieur à x. (Ainsi par exemple $s(\pi) = 4$). Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la variable aléatoire $Y = s(X)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2016, 1/2)$. On pose $Y = (-2)^X$. Calculer $\mathbb{E}Y$.
3. Soient $X_1, \dots, X_{99}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher, c'est à dire que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On pose
$$Z = \prod_{k=1}^{99} (k + X_k).$$
Calculer $\mathbb{E}(Z)$, en prenant bien soin de justifier les calculs.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, puis que pour tout $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \, d\lambda(t).$$
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$. Indication : on pourra commencer par prendre $x \in]a, +\infty[$, où on a choisi un réel $a > 0$ quelconque.
4. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} F(n) = 0$. En déduire que
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \log(1 + x^{-2}).$$
5. On pose pour $x > 0$:
$$G(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \, d\lambda(t).$$
Vérifier que G est bien définie, puis montrer que G est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $G' = -F$.

6. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2} \log(1 + x^{-2}) - \operatorname{atan} x.$$

7. Déterminer la valeur de C.
8. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

(On commencera par montrer que l'intégrale converge.)

FIN