**Intégration et probabilités**
**Examen de seconde session du 16/06/2015 (durée 3h)**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Aucun document n'est autorisé. Une attention particulière sera portée dans la notation à la qualité de la rédaction.

**Exercice 1.** On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Soit $n \geq 2$ et soit $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose
$$Y = \max_{1\leq i\leq n} U_i.$$
Montrer que $Y$ admet une densité qu'on calculera, puis déterminer $\mathbb{E}(Y)$.
2. Soit $X$ une variable aléatoire positive définie sur $\Omega$. On note $F_X$ sa fonction de répartition. Montrer que
$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt.$$
En déduire une condition sur $1 - F_X$ pour que $X$ soit intégrable.
3. Soit $n \geq 2$ et soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires positives, intégrables, indépendantes et identiquement distribuées. On note $F$ la fonction de répartition commune des $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et on pose
$$Z = \min_{1\leq i\leq n} X_i.$$
Montrer que $Z$ est intégrable et donner une expression de $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $n$ et de $F$.

**Exercice 2.** Soit $b > a > 0$ deux nombres réels fixés. Sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, on considère la mesure de Lebesgue notée $\lambda^{(2)}$. On introduit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \exp(-xy)\mathbf{1}_{\{x>0\}}\mathbf{1}_{\{a<y<b\}}.$$

1. Montrer que $f$ est mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que $f$ est intégrable par rapport à $\lambda^{(2)}$.
3. Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

**Exercice 3.**
On souhaite donner une autre expression de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x)\cos(\sqrt{x})dx$.

1. Justifier la convergence de l'intégrale $I$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} \exp(-t) dt.$$
   (a) Justifier l'existence de $\Gamma(n)$ pour tout $n$.
   (b) Calculer $\Gamma(1)$, puis montrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra procéder par récurrence).
3. On pose, pour tout $x \geq 0$,
$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} \exp(-x).$$
   (a) On note $\mu$ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que
$$\int_{[0,+\infty[} g d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{(2k)!}.$$
   (b) $g$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue ?
4. (a) Enoncer le théorème de convergence dominée.
   (b) En utilisant le développement de $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ en série entière, montrer que
$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!}.$$
   On pourra poser $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!} \exp(-x)$.

**Exercice 4.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $t \in [0, +\infty[$,
$$f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\exp(-tx)}{1+x^2} d\lambda(x).$$

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto \frac{\exp(-tx)}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $f$ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. La fonction $f$ admet-elle une limite en $+\infty$ ?
4. Montrer que $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et donner une expression de sa dérivée.
5. (Hors-barême) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 satisfaite par $f$. On ne demande pas de la résoudre.