

DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques UE : Intégration et Probabilités Semestre : 5 Epreuve de : Session 1 Date : 16 janvier 2026 Horaire : 09H00–12H00	Durée du sujet : 3H Nom du rédacteur : O. GARET ☒ Seul document autorisé : 1 recto/verso A4 manuscrit ☐ Documents autorisés ☐ Calculatrices autorisées ☒ Calculatrice non autorisée
--	--

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants, sauf la dernière question du sujet. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

On rédigera les exercices 1 et 2 sur une copie, les exercices 3 et 4 sur une autre copie.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies. On pourra utiliser sans démonstration que l'aire d'un disque de rayon R dans le plan euclidien vaut πR^2 .

- Exercice 1.**
1. Soit $z = c + id$ un nombre complexe, avec $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} d\lambda(t) = \frac{1}{z}$.
 2. Montrer que $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
 3. Montrer que pour tout réel a , la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(ax)}{e^x - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue. (Par exemple avec l'inégalité des accroissements finis.)
 4. On pose, pour a un réel quelconque

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - \cos(ax)}{e^x - 1} d\lambda(x).$$

Soit A un réel strictement positif. Montrer que F est continue sur $] - A, A[$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Soit a un réel quelconque. Étudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n^a(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \cos(ax)) e^{-(k+1)x}$.
6. Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} f_n^a(x) d\lambda(x)$ tend vers $F(a)$ quand n tend vers l'infini.
7. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$F(a) = a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2 + a^2)}.$$

Exercice 2. On considère le solide S de l'espace $\mathbb{R}^3$ défini par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

Calculer le volume de S .

Exercice 3. 1. Pour $a \geq 1$, justifier la convergence de l'intégrale

$$g(a) = \int_{[0,1[} \log(a - x^2) d\lambda(x).$$

(On pourra éventuellement être amené à traiter séparément le cas $a = 1$.)

2. On pose, pour $x > 0$, $\psi(x) = x \log x$, et on la prolonge par continuité en 0. Montrer, pour $a \geq 1$, l'identité :

$$g(a) = -2 + \left(\psi(\sqrt{a} + 1) - \psi(\sqrt{a} - 1) \right).$$

3. On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = - \int_{[0,1]} n \log(1 - \frac{x^2}{n}) d\lambda(x)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

Indication : on pourra commencer par démontrer que pour $x \in [0, 1/2]$, $\log(1-x) \geq -2x$.

4. En déduire un développement de $g(n)$ en $+\infty$ sous la forme

$$g(n) = \log n + \frac{A}{n^\alpha} + o(n^{-\alpha}),$$

où A et α sont à déterminer

Exercice 4. On suppose que X, Y, U sont des variables aléatoires indépendantes, avec X et Y qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et U la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} X & U \\ U & Y \end{pmatrix} \text{ et } N = I_2 + M,$$

où I_2 est la matrice de l'identité sur $\mathbb{R}^2$. M et N sont des matrices aléatoires.

1. On pose $S = X + Y$. Quelle est la loi de S ?
2. Exprimer $\text{tr } N$ en fonction de S . Calculer $\mathbb{E}(\text{tr } N)$ et $\text{Var}(\text{tr } N)$.
3. Montrer que $\det N = 2^S - U^2$.
On pourra commencer par remarquer que pour tout $u \in \{0, 1\}$, $1 + u = 2^u$.
4. Calculer $\mathbb{E}(\det N)$ et $\text{Var}(\det N)$.
5. Montrer que N est presque sûrement inversible.
(On pourra commencer par justifier l'inégalité presque sûre : $U^2 \leq 1 \leq 2^S$.)
6. Montrer soigneusement l'égalité presque sûre :

$$\log(\det N) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{1}_{\{S=k\}} \log(2^k - U^2).$$

7. Montrer que

$$\mathbb{E}(\log(\det(N))) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k} \mathbb{E}(\log(2^k - U^2)),$$

puis

$$\mathbb{E}(\log(\det(N))) = \log \left(e^{-2} 2^{2(1-p)^2} 3^{3p^2} (1 + \sqrt{2})^{4p(1-p)\sqrt{2}} \right).$$

(On pourra utiliser les résultats donnés dans l'exercice 3.)

1 Solutions

Solution 1 1. Pour a, b réels, on a $|e^{a+ib}| = |e^a e^{ib}| = |e^a| \cdot |e^{ib}| = e^a$. En particulier $|e^{-zt}| = e^{-ct}$, et

$$\int_{\mathbb{R}^+} |e^{-zt}| d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ct} d\lambda(t) = \frac{1}{c} < +\infty,$$

donc $z \mapsto e^{-zt}$ est intégrable. On a

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-zt} d\lambda(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{[0, N]} e^{-zt} d\lambda(t)$$

Or,

$$\int_{[0, N]} e^{-zt} d\lambda(t) = \int_0^N e^{-zt} dt = \frac{1 - e^{-zN}}{z}.$$

Comme $|e^{-zN}| = e^{-cN} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-zt} d\lambda(t) = \frac{1}{z}.$$

Note : il ne faut pas oublier de justifier que $\lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-zN} = 0$.

2. — Solution 1 : La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est clairement continue sur $]0, +\infty[$. En 0, $e^x = 1 + x + o(x)$, donc $e^x - 1 \sim x$ et $\frac{x}{e^x - 1} \sim 1$: f admet un prolongement par continuité en 0 : l'intégrale est donc « faussement impropre » en 0. La fonction est donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, seul le comportement à l'infini reste à étudier. Or $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{x/2}} \frac{x}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$. En l'infini $\frac{x}{e^{x/2} - e^{-x/2}} \sim \frac{x}{e^{x/2}}$ tend vers 0 avec les croissances comparées classiques. Ainsi $f(x) = o(e^{-x/2})$ en l'infini. Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'intégrabilité de f en l'infini, et finalement sur $\mathbb{R}_+$.
- Solution 2 : Pour tout $x \geq 0$, on a $x \leq \sinh(x)$, et en particulier $x/2 \leq \sinh(x/2)$. Pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$. Ainsi

$$0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{2 \sinh(x/2)}{e^x - 1} = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^x - 1} = e^{-x/2}.$$

Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le résultat s'ensuit.

3. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout t réel, on a $|1 - \cos t| \leq |t|$. En particulier, pour $x \geq 0$,

$$\left| \frac{1 - \cos ax}{e^x - 1} \right| \leq \frac{|ax|}{e^x - 1} = |a| \frac{x}{e^x - 1}$$

et l'intégrabilité découle de celle de f .

4. — Solution 1 : Fixons $A > 0$. On a
- Pour tout $x \geq 0$, $a \mapsto \frac{\sin ax}{e^x - 1}$ est continue sur $[-A, A]$.
 - Pour tout $x \geq 0$, pour tout $a \in [-A, A]$, on a

$$\left| \frac{1 - \cos ax}{e^x - 1} \right| \leq \frac{|ax|}{e^x - 1} = |a| \frac{x}{e^x - 1} \leq A \frac{x}{e^x - 1} = Af(x).$$

— $\int_{\mathbb{R}_+} Af(x) d\lambda(x) < +\infty$ d'après la question précédente.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, F est continue sur $[-A, A]$.

Comme la continuité est une propriété locale et que tout point de $\mathbb{R}$ a un voisinage de la forme $[-A, A]$, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.

— Solution 2 : Pour a, b dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |F(a) - F(b)| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\cos(bx) - \cos(ax))}{e^x - 1} d\lambda(x) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{(\cos(bx) - \cos(ax))}{e^x - 1} \right| d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|ax - bx|}{e^x - 1} d\lambda(x) \\ &\leq C|a - b|, \end{aligned}$$

avec $C = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{e^x - 1} d\lambda(x) < +\infty$. Ceci montre que F est C -lischitzienne. En particulier, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5. Pour $x = 0$, la suite $f_n^a(x)$ est identiquement nulle. Sinon, pour $x > 0$, on reconnaît la suite des sommes partielles de la série géométrique de premier terme $(1 - \cos(ax))e^{-x}$ et de raison e^{-x} avec $0 \leq e^{-x} < 1$: la limite lorsque n tend vers l'infini est

$$(1 - \cos(ax))e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Dans tous les cas $f_n^a(x)$ tend vers $(1 - \cos(ax))e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}}$.

6. On a simplement

$$\begin{aligned} |f_n^a(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |(1 - \cos(ax))e^{-(k+1)x}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |ax|e^{-(k+1)x} \\ &\leq |a| \sum_{k=0}^{+\infty} xe^{-(k+1)x} = |a| \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = |a|f(x) \end{aligned}$$

Comme $|a|f$ est intégrable, on obtient par le théorème de convergence dominée que la limite des intégrales est l'intégrale de la limite, soit $F(a)$.

On pouvait aussi procéder par convergence monotone.

7. On a

$$f_n^a(x) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1 - e^{iax})e^{-(k+1)x} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1-ia)x}) \right)$$

La fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1-ia)x})$ est intégrable comme somme de n fonctions intégrables (voir la question 1) et l'intégrale de la somme est la somme des intégrales :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1-ia} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k-ia}.$$

L'intégrale de f_n^a en est la partie réelle, soit

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k-ia} &= \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{k+ia}{k^2+a^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{k}{k^2+a^2} \\ &= a^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k^2+a^2)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu avec la question précédente.

Solution 2 On considère le solide

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

Les conditions définissant S peuvent se réécrire sous la forme

$$x^2 + y^2 \leq z \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \leq 4 - z.$$

On obtient donc $(x, y, z) \in S \iff x^2 + y^2 \leq \min(z, 4 - z)$.

Détermination des sections horizontales

Pour $z \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la section $S_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in S\}$.

Pour que S_z soit non vide, il faut $\min(z, 4 - z) \geq 0$, ce qui impose $0 \leq z \leq 4$.

Pour $z \in [0, 4]$, la section S_z est un disque centré à l'origine, de rayon $R(z) = \sqrt{\min(z, 4 - z)}$. Son aire vaut donc $\lambda^2(S_z) = \pi R(z)^2 = \pi \min(z, 4 - z)$.

Calcul du volume par intégration suivant les tranches

Le volume du solide S est donné par

$$\lambda^3(S) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(S_z) d\lambda(z) = \int_0^4 \lambda^2(S_z) dz = \pi \int_0^4 \min(z, 4 - z) dz.$$

On scinde l'intégrale au point $z = 2$:

$$\lambda^3(S) = \pi \left(\int_0^2 z dz + \int_2^4 (4 - z) dz \right) = 2\pi \int_0^2 z dz.$$

(Le changement de variable est inspiré par la symétrie de V). Enfin,

$$\lambda^3(V) = 2\pi \int_0^2 z dz = 2\pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 4\pi.$$

Solution 3 1. Soit $a \geq 1$. On considère

$$g(a) = \int_{[0,1[} \log(a - x^2) d\lambda(x).$$

Si $a > 1$, la fonction $x \mapsto a - x^2$ est strictement positive sur $[0, 1]$, et

$$\log(a - x^2)$$

est continue sur $[0, 1]$; l'intégrale est donc bien définie et finie.

Si $a = 1$, on a

$$\log(1 - x^2) = \log(1 - x) + \log(1 + x).$$

La fonction $\log(1+x)$ est continue sur $[0, 1]$, tandis que $\log(1-x)$ présente une singularité en $x = 1$. Comme $x \mapsto \log(1-x)$ est continue sur $[0, 1[$, l'intégrale $\int_{[0,1[} \log(1-x^2) d\lambda(x)$ est définie et réelle si et seulement si l'intégrale impropre $\int_0^1 \log(1-x) dx$ est convergente.

Posons pour $x > 0$: $\psi(x) = x \log x$. ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$; elle se prolonge par continuité en 0 avec $\psi(0) = 0$. Pour $x > 0$, on a $\psi'(x) = 1 + \log(x)$.

Maintenant, $\int_0^1 \log(1-x) dx$ et de même nature que $\int_0^1 1 + \log(1-x) dx = \int_0^1 \psi'(1-x) dx$, qui est convergente, car ψ a une limite nulle en 0.

Ceci montre que $\log(1-x^2)$ est intégrable sur $[0, 1[$. Ainsi, pour tout $a \geq 1$, l'intégrale converge.

2. On a pour $x \in]0, 1[$ et $a \in [0, 1]$:

$$\log(a - x^2) = \log(\sqrt{a} - x) + \log(\sqrt{a} + x) = \psi'(\sqrt{a} - x) + \psi'(\sqrt{a} + x) - 2.$$

En intégrant entre 0 et 1, il vient

$$g(a) = -2 + [-\psi(\sqrt{a} - x)]_0^1 + [\psi(\sqrt{a} + x)]_0^1 = \psi(\sqrt{a} + 1) - \psi(\sqrt{a} - 1) - 2.$$

3. Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = - \int_0^1 n \log \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) = \int_{[0,1]} f_n(x) d\lambda(x) \quad \text{avec } f_n(x) = -n \log \left(1 - \frac{x^2}{n} \right).$$

Si on pose $f(x) = -\log(1-x)$, on a, pour $x \in [0, 1/2]$, $f'(x) = \frac{1}{1-x} \leq 2$. f est croissante, et avec l'inégalité des accroissements finis, on a $0 \leq f(x) \leq 2x$.

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \geq 2$, on a $\frac{x^2}{n} \in [0, 1/2]$, et l'inégalité ci-dessus donne

$$0 \leq -n \log \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \leq 2x^2.$$

La fonction $x \mapsto 2x^2$ est intégrable sur $[0, 1]$, et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\log(1 - x^2/n) = -x^2/n + o(1/n),$$

d'où $-n \log(1 - x^2/n) = x^2 + o(1)$ ce qui signifie que pour tout $x \in [0, 1]$

$$f_n(x) = -n \log \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2.$$

La suite (f_n) étant dominée par la fonction $x \mapsto 2x^2$ intégrable sur $[0, 1]$, le théorème de convergence dominée s'applique et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

4. On écrit

$$g(n) = \int_0^1 \log(n - x^2) dx = \log n + \int_0^1 \log\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) dx.$$

Ainsi,

$$g(n) = \log n - \frac{u_n}{n}.$$

Comme $u_n \rightarrow \frac{1}{3}$, on en déduit

$$g(n) = \log n - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le développement asymptotique de $g(n)$ en $+\infty$ est

$$\boxed{g(n) = \log n - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right),}$$

ce qui donne le développement voulu avec $\alpha = 1$ et $A = -\frac{1}{3}$.

Solution 4 On considère des variables aléatoires indépendantes X, Y, U , où X et Y suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, et U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit

$$M = \begin{pmatrix} X & U \\ U & Y \end{pmatrix}, \quad N = I_2 + M = \begin{pmatrix} 1+X & U \\ U & 1+Y \end{pmatrix}.$$

1. Les variables X et Y étant indépendantes et de loi $\mathcal{B}(p)$, la variable

$$S = X + Y$$

suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(S = k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}, \quad k = 0, 1, 2.$$

2. On a

$$\text{tr } N = (1 + X) + (1 + Y) = 2 + S.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(\text{tr } N) = 2 + \mathbb{E}(S) = 2 + 2p,$$

et, comme $\text{Var}(S) = 2p(1-p)$,

$$\text{Var}(\text{tr } N) = \text{Var}(S) = 2p(1-p).$$

3. On calcule $\det N = (1 + X)(1 + Y) - U^2$. Or, pour tout $u \in \{0, 1\}$, on a $1 + u = 2^u$, d'où

$$(1 + X)(1 + Y) = 2^{X+Y} = 2^S.$$

Ainsi, $\det N = 2^S - U^2$.

4. Par linéarité, $\mathbb{E}(\det N) = \mathbb{E}(2^S) - \mathbb{E}(U^2)$. Or,

$$\mathbb{E}(2^S) = \sum_{k=0}^2 2^k \mathbb{P}(S = k) = \sum_{k=0}^2 2^k \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k} = (1-p+2p)^2 = (1+p)^2,$$

et

$$\mathbb{E}(U^2) = \int_{\Omega} U(\omega)^2 d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} u^2 d\mathbb{P}_U(u) = \int_{\mathbb{R}} u^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(u) d\lambda(u) = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(\det N) = (1+p)^2 - \frac{1}{3}.$$

La variable $2^S = 2^{X+Y}$ est $\sigma(X, Y)$ -mesurable, tandis que U^2 est $\sigma(U)$ mesurable. Or, d'après le lemme des coalitions, les tribues $\sigma(X, Y)$ et $\sigma(U)$ sont indépendantes, donc 2^S et U^2 sont indépendantes. Comme elles sont bornées, elles ont des moments d'ordre 2, et par indépendance, la variance de la somme est la somme des variances, soit

$$\text{Var}(\det N) = \text{Var}(2^S) + \text{Var}(U^2).$$

Or

$$\text{Var}(2^S) = \mathbb{E}(4^S) - (\mathbb{E}(2^S))^2.$$

En procédant comme précédemment, on a

$$\mathbb{E}(4^S) = \sum_{k=0}^2 4^k \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k} = (1-p+4p)^2 = (1+3p)^2,$$

d'où

$$\text{Var}(2^S) = (1+3p)^2 - (1+p)^4 = p(1-p)(p^2 + 5p + 2).$$

De plus,

$$\text{Var}(U^2) = \mathbb{E}(U^4) - (\mathbb{E}(U^2))^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

Finalement,

$$\text{Var}(\det N) = (1+3p)^2 - (1+p)^4 + \frac{4}{45} = p(1-p)(p^2 + 5p + 2) + \frac{4}{45}.$$

5. On a presque sûrement $0 \leq U^2 \leq 1$. D'autre part, puisque $S \in \{0, 1, 2\}$, on a $2^S \geq 1$. Ainsi,

$$\det N = 2^S - U^2 \geq 1 - U^2 \geq 0,$$

avec égalité seulement si $S = 0$ et $U = 1$, événement de probabilité nulle puisque $\mathbb{P}(U = 1) = 0$.

Donc $\mathbb{P}(\det N = 0) = 0$, et N est presque sûrement inversible.

6. Comme S ne prend que les valeurs 0, 1, 2, on peut écrire, presque sûrement,

$$\log(\det N) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{1}_{\{S=k\}} \log(\det N) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{1}_{\{S=k\}} \log(2^S - U^2) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{1}_{\{S=k\}} \log(2^k - U^2).$$

7. En prenant l'espérance et en utilisant l'indépendance de S et U , on obtient

$$\mathbb{E}(\log(\det N)) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}(S = k) \mathbb{E}(\log(2^k - U^2)),$$

soit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\log(\det N)) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k} \mathbb{E}(\log(2^k - U^2)) \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k} \left(-2 + \psi(2^{k/2} + 1) - \psi(2^{k/2} - 1) \right) \\ &= -2 + \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k} \left(\psi(2^{k/2} + 1) - \psi(2^{k/2} - 1) \right) \\ &= -2 + (1-p)^2 (\psi(2) - \psi(0)) \\ &\quad + 2p(1-p) \left(\psi(1 + \sqrt{2}) - \psi(\sqrt{2} - 1) \right) \\ &\quad + p^2 (\psi(3) - \psi(1)) \\ &= -2 + 2(1-p)^2 \log 2 + 3p^2 \log 3 \\ &\quad + 2p(1-p) \left((1 + \sqrt{2}) \log(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1) \log(\sqrt{2} - 1) \right). \end{aligned}$$

Cependant, comme $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$, on a

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2}) \log(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1) \log(\sqrt{2} - 1) &= (1 + \sqrt{2}) \log(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) \log(\sqrt{2} + 1) \\ &= 2\sqrt{2} \log(\sqrt{2} + 1), \end{aligned}$$

et finalement

$$\mathbb{E}(\log(\det N)) = \log \left(e^{-2} 2^{2(1-p)^2} 3^{3p^2} (1 + \sqrt{2})^{4p(1-p)\sqrt{2}} \right).$$