

DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques UE : Intégration et Probabilités Semestre : 5 Epreuve de : Session 1 Date : 16 janvier 2026 Horaire : 09H00–12H00	Durée du sujet : 3H Nom du rédacteur : O. GARET ☒ Seul document autorisé : 1 recto/verso A4 manuscrit ☐ Documents autorisés ☐ Calculatrices autorisées ☒ Calculatrice non autorisée
--	--

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants, sauf la dernière question du sujet. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

On rédigera les exercices 1 et 2 sur une copie, les exercices 3 et 4 sur une autre copie.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies. On pourra utiliser sans démonstration que l'aire d'un disque de rayon R dans le plan euclidien vaut πR^2 .

- Exercice 1.**
1. Soit $z = c + id$ un nombre complexe, avec $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} d\lambda(t) = \frac{1}{z}$.
 2. Montrer que $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
 3. Montrer que pour tout réel a , la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(ax)}{e^x - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue. (Par exemple avec l'inégalité des accroissements finis.)
 4. On pose, pour a un réel quelconque

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - \cos(ax)}{e^x - 1} d\lambda(x).$$

Soit A un réel strictement positif. Montrer que F est continue sur $] - A, A[$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Soit a un réel quelconque. Étudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n^a(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \cos(ax)) e^{-(k+1)x}$.
6. Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} f_n^a(x) d\lambda(x)$ tend vers $F(a)$ quand n tend vers l'infini.
7. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$F(a) = a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2 + a^2)}.$$

Exercice 2. On considère le solide S de l'espace $\mathbb{R}^3$ défini par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

Calculer le volume de S .

Exercice 3. 1. Pour $a \geq 1$, justifier la convergence de l'intégrale

$$g(a) = \int_{[0,1[} \log(a - x^2) d\lambda(x).$$

(On pourra éventuellement être amené à traiter séparément le cas $a = 1$.)

2. On pose, pour $x > 0$, $\psi(x) = x \log x$, et on la prolonge par continuité en 0. Montrer, pour $a \geq 1$, l'identité :

$$g(a) = -2 + \left(\psi(\sqrt{a} + 1) - \psi(\sqrt{a} - 1) \right).$$

3. On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = - \int_{[0,1]} n \log(1 - \frac{x^2}{n}) d\lambda(x)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

Indication : on pourra commencer par démontrer que pour $x \in [0, 1/2]$, $\log(1-x) \geq -2x$.

4. En déduire un développement de $g(n)$ en $+\infty$ sous la forme

$$g(n) = \log n + \frac{A}{n^\alpha} + o(n^{-\alpha}),$$

où A et α sont à déterminer

Exercice 4. On suppose que X, Y, U sont des variables aléatoires indépendantes, avec X et Y qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et U la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} X & U \\ U & Y \end{pmatrix} \text{ et } N = I_2 + M,$$

où I_2 est la matrice de l'identité sur $\mathbb{R}^2$. M et N sont des matrices aléatoires.

1. On pose $S = X + Y$. Quelle est la loi de S ?
2. Exprimer $\text{tr } N$ en fonction de S . Calculer $\mathbb{E}(\text{tr } N)$ et $\text{Var}(\text{tr } N)$.
3. Montrer que $\det N = 2^S - U^2$.

On pourra commencer par remarquer que pour tout $u \in \{0, 1\}$, $1 + u = 2^u$.

4. Calculer $\mathbb{E}(\det N)$ et $\text{Var}(\det N)$.
5. Montrer que N est presque sûrement inversible.
(On pourra commencer par justifier l'inégalité presque sûre : $U^2 \leq 1 \leq 2^S$.)
6. Montrer soigneusement l'égalité presque sûre :

$$\log(\det N) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{1}_{\{S=k\}} \log(2^k - U^2).$$

7. Montrer que

$$\mathbb{E}(\log(\det(N))) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k} \mathbb{E}(\log(2^k - U^2)),$$

puis

$$\mathbb{E}(\log(\det(N))) = \log \left(e^{-2} 2^{2(1-p)^2} 3^{3p^2} (1 + \sqrt{2})^{4p(1-p)\sqrt{2}} \right).$$

(On pourra utiliser les résultats donnés dans l'exercice 3.)