DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto/verso A4 manuscrit
Session 1	☐ Documents autorisés
Date : 16 janvier 2025	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 13H00–16H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé de trois parties indépendantes. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

Barème indicatif, par partie : I : 8 points ; II : 5 points ; III : 20 points.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

*** Partie I : Une intégrale dépendant d'un paramètre ***

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\, d\lambda(t).$$

2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$. Indication : on pourra commencer par prendre $x \in]a, +\infty[$, où on a choisi un réel $a > 0$ quelconque.

3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$. En déduire que

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1 + x^{-2}).$$

*** Partie II : Une intégrale double ***

Calculer, si elle existe, l'intégrale

$$\int_{[0,1]^2} \frac{x}{x+y}\, d\lambda^{\otimes 2}(x, y)$$

*** Partie III : Équivalent d'une espérance ***

Dans cette partie $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$, on note

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2; \|x-y\| \leq r\}$$

Pour n entier naturel, on suppose que la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $B(0,n)$. On pose également $Y_n = \|X_n\|$ et

$$Z_n = \left(\frac{\sin(Y_n)}{Y_n}\right)^3 = \left(\frac{\sin\|X_n\|}{\|X_n\|}\right)^3.$$

1. Montrer que Z_n est intégrable (c'est à dire que $\mathbb{E}(|Z_n|) < +\infty$). Un des buts de cette partie est de déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$.
2. On note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n. Montrer que

$$F_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (t/n)^2 & \text{si } t \in [0,n[\\ 1 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

3. En déduire que Y_n admet comme densité la fonction f_{Y_n} donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{Y_n}(t) = \frac{2t}{n^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t).$$

4. Justifier soigneusement l'identité

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{2}{n^2}\int_0^n \frac{\sin(t)^3}{t^2}\,dt.$$

5. Pour $x > 0$, on pose

$$L(x) = \int_0^x \frac{u - \sin(u)}{u^2}\,du.$$

   Vérifier que $L(x)$ est bien défini, puis établir l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{E}(Z_n) = \frac{3}{2n^2}\left(L(3n) - L(n)\right).$$

   Indication : on pourra utiliser sans démonstration l'identité de linéarisation

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)^3 = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}.$$

6. On pose $C = L(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\,du$. Montrer qu'on a en l'infini

$$L(n) = \log(n) + C + o(1).$$

   En déduire l'existence d'une constante D telle qu'on a en l'infini l'équivalent

$$\mathbb{E}(Z_n) \sim \frac{D}{n^2}.$$

7. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2}\,dt = \frac{D}{2}$.
8. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Calculer, si elle existe,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\sin\|x\|_2}{\|x\|_2}\right)^3 \,d\lambda^{\otimes 2}(x).$$

FIN

*** Partie I : Une intégrale dépendant d'un paramètre *** 8 points

1. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc mesurable par rapport à la tribu borélienne.
   Comme $|\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \le e^{-xt}$ et que $\int_{]0,+\infty[} e^{-xt}\ d\lambda(t) = \frac{1}{x} < +\infty$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. 2 points
2. Soit $a > 0$. On a $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} = -(1-\cos t)e^{-xt}$, donc

   $$\forall x \in]a, +\infty[\quad \forall t \in]0, +\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}| = (1-\cos t)e^{-xt} \le 2e^{-at}.$$

   Comme $\int_{]0,+\infty[} 2e^{-at}\ d\lambda(t) = \frac{2}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de F sur $]a, +\infty[$, avec

   $$F'(x) = \int_{]0,+\infty[} (\cos t - 1)e^{-xt}\ d\lambda(t) = \int_{]0,+\infty[} \cos t\ e^{-xt}\ d\lambda(t) - \frac{1}{x}.$$

   Comme $|e^{it}e^{-tx}| = e^{-tx}$, la fonction $t \mapsto e^{it}e^{-tx}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$:

   $$\begin{aligned} \int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\ d\lambda(t) &= \lim_{M\to+\infty} \int_{]0,M[} e^{it}e^{-tx}\ d\lambda(t) \\ &= \lim_{M\to+\infty} \frac{1-e^{(i-x)M}}{x-i} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}. \end{aligned}$$

   On en déduit

   $$\mathbf{Re}\ \left(\int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\ d\lambda(t) \right) = \frac{x}{x^2+1},$$

   soit

   $$\int_{]0,+\infty[} \cos t e^{-tx}\ d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$

   et finalement $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]a, +\infty[$. Comme tout $x > 0$ admet un voisinage de la forme $]a, +\infty[$ pour un certain $a > 0$ (par exemple $a = x/2$) , la dérivabilité de F sur $]0, +\infty[$ s'ensuit.
   3 points
3. $0 \le \frac{1-\cos t}{t} e^{-nt} \le e^{-nt}$, donc en intégrant $0 \le F(n) \le \frac{1}{n}$, ce qui entraîne $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$. Comme $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$, une primitive de F sur $]0, +\infty[$ est

   $$\frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log x = \frac{1}{2}(\log(x^2+1) - \log x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}),$$

   donc il existe K réel tel que

   $$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}) + K.$$

   En faisant $x = n$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $K = 0$, soit

   $$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}).$$

   3 points

*** Partie II : Une intégrale double 5 points

La fonction $(x,y) \mapsto \frac{x}{x+y}$ est positive sur le carré $[0,1]^2$: on peut appliquer le théorème de Tonelli.

Pour $x \in]0,1]$, on a

$$\int_{[0,1]} \frac{x}{x+y}\ d\lambda(y) = x \int_0^1 \frac{dy}{x+y} = x(\log(x+1) - \log(x)).$$

Il s'agit donc maintenant de calculer

$$\int_{[0,1]} x(\log(x+1) - \log(x))\ d\lambda(x).$$

La fonction $\phi(x) = x\log(x)$ se prolonge par continuité en 0 en posant $\phi(x) = 0$. C'est une primitive de la fonction $1 + \log(x)$. On peut écrire

$$\begin{aligned} x(\log(x+1) - \log(x)) &= (x+1)\log(x+1) - \log(x+1) - x\log(x) \\ &= \phi(x+1) + 1 - \phi'(x+1) - \phi(x) \end{aligned}$$

Ici, on a décomposé la fonction à intégrer comme somme de fonctions intégrables. Si F désigne une primitive de ϕ, le résultat cherché sera

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi(x+1) + 1 - \phi'(x+1) - \phi(x)\ dx &= F(2) - F(1) + 1 - \phi(2) + \phi(1) - F(1) + F(0) \\ &= F(0) + F(2) - 2F(1) + 1 - \phi(2) \end{aligned}$$

On a

$$\int \phi(x)\ dx = \int x\log x\ dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4}$$

Ainsi, $F(x) = \frac{x\phi(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$ est la primitive de F qui s'annule en 0. On a $F(2) = \phi(2) - 1$ et $F(1) = -1/4$. Ainsi, l'intégrale cherchée vaut

$$F(0) + F(2) - 2F(1) + 1 - \phi(2) = 0 + \phi(2) - 1 + 1/2 + 1 - \phi(2) = 1/2.$$

Bien sûr, on peut faire plus simple. Posant $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$ et $g(x,y) = f(y,x)$, le théorème de Tonelli donne les égalités

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} f(x,y)\ d\lambda^{\otimes 2}(x,y) &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y) d\lambda(y) \right)\ d\lambda(x) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(y,x) d\lambda(x) \right)\ d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} g(x,y) d\lambda(x) \right)\ d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]^2} g(x,y)\ d\lambda^{\otimes 2}(x,y) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} f\ d\lambda^{\otimes 2} &= \frac{1}{2}\left(\int_{[0,1]^2} f\ d\lambda^{\otimes 2} + \int_{[0,1]^2} g\ d\lambda^{\otimes 2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_{[0,1]^2} (f+g)\ d\lambda^{\otimes 2} = \frac{1}{2}\int_{[0,1]^2} 1\ d\lambda^{\otimes 2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

*** Partie II : Équivalent d'une espérance *** 20 points

1. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\sin(x)| \le |x|$ pour tout x ; en particulier $|\frac{\sin(\|X-n\|)}{\|X_n\|} \le 1$, d'où en élevant au cube $|Z_n| \le 1$. Z_n étant bornée, elle est intégrable par rapport à toute mesure de probabilité. 2 points
2. Soit t réel $F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}(Y_n \le t) = \mathbb{P}(\|X_n\| \le t)$. Par définition d'une norme, on a $F_{Y_n}(t) = 0$ pour $t < 0$. Pour $t \ge 0$, on a

$$\begin{aligned}F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \in B(0,t)) = \mathbb{P}_{X_n}(B(0,t)) &= \frac{\lambda^{\otimes 2}(B(0,t)\cap B(0,n))}{\lambda^{\otimes 2}(B(0,n))}\\ = \frac{\lambda^{\otimes 2}(B(0,t\wedge n))}{\lambda^{\otimes 2}(B(0,n))} &= \frac{(t\wedge n)^2\lambda^{\otimes 2}(B(0,1))}{n^2\lambda^{\otimes 2}(B(0,1))} = \left(\frac{t}{n}\wedge 1\right)^2,\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.2 points
3. On voit sans peine que F_{Y_n} est continue, C^1 par morceaux. La loi de Y_n est donc à densité, avec une dérivée donnée par la dérivée de F_{X_n} sur chacun des intervalles où elle est C_1 ; cela nous donne donc la densité $f_{Y_n}(t) = \frac{2x}{n^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.1,5 point
4. On a $Z_n = g(Y_n)$, avec $g(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3$. On en déduit avec le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n) &= \int_\Omega g(Y_n)\ d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g(x)\ d\mathbb{P}_{Y_n}(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{Y_n}(x)\ d\lambda(x) = \int_0^n g(x)\frac{2x}{n^2}\ dx = \int_0^n \frac{2\sin(x)^3}{x^2n^2}\ dx\end{aligned}$$

1,5 point
5. Comme on a en 0 : $\sin(u) = u + O(u^3)$, on a $u - \sin(u) = O(u^3)$, donc $\frac{u-\sin(u)}{u^2} = O(u)$, donc la fonction $u \mapsto \frac{u-\sin(u))}{u^2}$ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0. L'intégrale $\int_0^x \frac{u-\sin(u)}{u^2}\ du$ est donc une intégrale faussement impropre, convergente. Avec un changement de variable affine, on a

$$L(3x) = \int_0^{3x} \frac{3(u/3)-\sin(3(u/3))}{(u/3)^2}\ \frac{1}{3}\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{3u-\sin(3u)}{u^2}\ du$$

Comme

$$L(x) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{3u-3\sin(u)}{u^2}\ du,$$

on a en faisant la différence

$$L(3x) - L(x) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{3\sin(u)-\sin(3u)}{u^2}\ du = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{4\sin(u)^3}{u^2}\ du,$$

et pour n entier

$$L(3n) - L(n) = \frac{2n^2}{3}\int_0^n \frac{2\sin(u)^3}{n^2u^2}\,du = \frac{2n^2}{3}\mathbb{E}(Z_n),$$

ce qui donne le résultat voulu.4 points

6. On a pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} L(x) = L(1) + \int_1^x \frac{u-\sin(u)}{u^2}\,du &= L(1) + \int_1^x \frac{du}{u} - \int_1^x \frac{\sin(u)}{u^2}du \\ = L(1) + \int_1^x \frac{u-\sin(u)}{u^2}\,du &= L(1) + \log(x) - \int_1^x \frac{\sin(u)}{u^2}du \end{aligned}$$

La majoration $|\frac{\sin u}{u^2}| \le \frac{1}{u^2}$ donne la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}du$. On a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}du = \int_1^x \frac{\sin(u)}{u^2}du + R(x) \text{ avec } R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}du$$

ainsi

$$\begin{aligned} L(x) &= L(1) + \log(x) - \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}du - R(x)\right) \\ &= \log(x) + C + R(x), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu puisque $R(x)$ est de limite nulle.

Comme $L(n) = \log(n) + C + o(1)$ et $L(3n) = \log(3n) + C + \log(n) + o(1)$, on a en faisant la différence $L(3n) - L(n) = \log(3) + o(1)$, d'où $L(3n) - L(n) \sim \log(3)$, puis $\mathbb{E}(Z_n) = \frac{3}{2n^2}(L(3n) - L(n)) \sim \frac{3\log 3}{2n^2}$. On a donc le résultat voulu avec $D = \frac{3\log 3}{2}$. 4,5 points

7. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2}\,dt$ est absolument convergente : la fonction intégrée est continue sur $]0, +\infty[$, faussement impropre en 0 car $|\frac{\sin(t)^3}{t^2}| \sim t$, la convergence en l'infini se déduit de la majoration $|\frac{\sin(t)^3}{t^2}| \le \frac{1}{t^2}$. On a simplement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2}\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{\sin(t)^3}{t^2}\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\mathbb{E}(Z_n)}{2} = \frac{D}{2} = \frac{3\log 3}{4}.$$

2 points

8. D'après le théorème d'intégration d'une fonction radiale, la fonction $x \mapsto (\frac{\sin\|x\|}{\|x\|})^3$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si la fonction $r \mapsto r(\frac{\sin r}{r})^3$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Cette intégrabilité a été établie à la question précédente. Toujours avec le théorème d'intégration d'une fonction radiale, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\sin\|x\|_2}{\|x\|_2}\right)^3\,d\lambda^{\otimes 2}(x) &= \lambda^{\otimes 2}(B(0,1))\int_0^{+\infty} 2r\frac{\sin(r)^3}{r^3} \\ &= 2\pi\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)^3}{t^2}\,dt = \pi D = \frac{3\pi\log 3}{2}. \end{aligned}$$

2,5 points