DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto/verso A4 manuscrit
Session 1	☐ Documents autorisés
Date : 16 janvier 2025	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 13H00–16H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé de trois parties indépendantes. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

Barème indicatif, par partie : I : 8 points ; II : 5 points ; III : 20 points.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

*** Partie I : Une intégrale dépendant d'un paramètre ***

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \, d\lambda(t).$$
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$.
Indication : on pourra commencer par prendre $x \in]a, +\infty[$, où on a choisi un réel $a > 0$ quelconque.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$. En déduire que
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \log(1 + x^{-2}).$$

*** Partie II : Une intégrale double ***

Calculer, si elle existe, l'intégrale
$$\int_{[0,1]^2} \frac{x}{x + y} \, d\lambda^{\otimes 2}(x, y)$$

*** Partie III : Équivalent d'une espérance ***

Dans cette partie $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$, on note

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 ; \|x-y\| \leq r\}$$

Pour n entier naturel, on suppose que la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $B(0,n)$. On pose également $Y_n = \|X_n\|$ et

$$Z_n = \left(\frac{\sin(Y_n)}{Y_n}\right)^3 = \left(\frac{\sin\|X_n\|}{\|X_n\|}\right)^3.$$

1. Montrer que Z_n est intégrable (c'est à dire que $\mathbb{E}(|Z_n|) < +\infty$). Un des buts de cette partie est de déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$.
2. On note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n. Montrer que

$$F_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (t/n)^2 & \text{si } t \in [0,n[\\ 1 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

3. En déduire que Y_n admet comme densité la fonction f_{Y_n} donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{Y_n}(t) = \frac{2t}{n^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t).$$

4. Justifier soigneusement l'identité

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{2}{n^2}\int_0^n \frac{\sin(t)^3}{t^2}\, dt.$$

5. Pour $x > 0$, on pose

$$L(x) = \int_0^x \frac{u - \sin(u)}{u^2}\, du.$$

Vérifier que $L(x)$ est bien défini, puis établir l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{E}(Z_n) = \frac{3}{2n^2}\left(L(3n) - L(n)\right).$$

Indication : on pourra utiliser sans démonstration l'identité de linéarisation

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)^3 = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}.$$

6. On pose $C = L(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\, du$. Montrer qu'on a en l'infini

$$L(n) = \log(n) + C + o(1).$$

En déduire l'existence d'une constante D telle qu'on a en l'infini l'équivalent

$$\mathbb{E}(Z_n) \sim \frac{D}{n^2}.$$

7. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2}\, dt = \frac{D}{2}$.
8. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Calculer, si elle existe,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\sin\|x\|_2}{\|x\|_2}\right)^3 \, d\lambda^{\otimes 2}(x).$$

FIN