DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto-verso A4
Session 1	☐ Documents autorisés
Date : 18 janvier 2024	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–12H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé d'un problème. Les résultats de la partie des préliminaires peuvent être mobilisés dans chaque partie. La partie II peut être traitée indépendamment de la partie I. La partie III utilise des résultats des parties I et II, qui seront systématiquement mentionnés. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

Barème indicatif, par partie : 4–13–11–10.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

*** Partie zéro (Préliminaires) ***

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, puis que pour tout $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$.
2. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$.

*** Partie I ***

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\, d\lambda(t).$$
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$.
Indication : on pourra commencer par fixer un réel $a > 0$ et travailler sur $]a, +\infty[$.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$. En déduire que
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1 + x^{-2}).$$

4. On pose pour $x > 0$:
$$G(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\, d\lambda(t).$$
Vérifier que G est bien définie, puis montrer que G est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec $G' = -F$.
5. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \operatorname{atan} x.$$
6. Déterminer la valeur de C (Indication : on pourra calculer de deux manières différentes la limite de G en $+\infty$).
7. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

*** Partie II ***

Pour $x > 0$, on pose $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt}\, dt$.

1. Vérifier que H est bien définie et l'écrire sous forme d'une intégrale de Lebesgue.
2. Montrer que $x \mapsto H(x)$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.
Remarque : il serait possible de démontrer que H admet un prolongement continu à $[0,+\infty[$, mais ce n'est pas demandé ici.
3. Montrer que H est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que
$$\int_{]0,+\infty[} H(x)\, d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t^2}\, d\lambda(t).$$
4. Montrer que cette intégrale est nulle. Indication : on pourra commencer par justifier l'identité, pour t réel :
$$(1-\cos t)\cos t = (1-\cos^2 t) - (1-\cos t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} - (1-\cos t).$$
5. Montrer qu'il existe $x > 0$ tel que $H(x) = 0$.

*** Partie III ***

Soit μ la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont une densité par rapport à la mesure de Lebesgue est
$$t \mapsto \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t).$$

1. À l'aide de I.7, montrer que pour tout α réel,
$$\int_{]0,+\infty[} \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos \alpha t}{t^2}\, d\lambda(t) = |\alpha|.$$
2. Montrer que μ est une mesure de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi μ. À l'aide des préliminaires, montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(X \leq \alpha) \leq \frac{\alpha}{\pi}$ et $\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{4}{\pi\alpha}$.
4. On pose $Y = \cos(X)$. À l'aide de II.4, montrer que Y est centrée.
5. ♣ Montrer que $\operatorname{Var} Y = \frac{1}{2}$.
Indication : on pourra s'inspirer de II.4 et utiliser III.1.

FIN

Préliminaires 4 points

1. Pour tout $t \geq 0$, on a $-1 \leq \cos t \leq 1$, ce qui entraîne évidemment $0 \leq 1 - \cos t \leq 2$. Pour $x \geq 0$ $\sin x = \int_0^x \cos u \; du \leq \int_0^x 1 \; du = x$, puis $1 - \cos t = \int_0^t \sin x \; dx \leq \int_0^t x \; dx = \frac{t^2}{2}$.
   On a donc bien $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $\theta \in]0, t[$ avec $|\frac{1-\cos t}{t}| = |\sin(\theta)| \leq 1$, d'où $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$. 2,5 points
2. La fonction à intégrer est positive, continue sur $]0, +\infty[$. Pour montrer l'intégrabilité, il suffit de la majorer par une fonction intégrable. Or, avec la question 1), on a

$$\forall t > 0 \quad 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{\min(t^2/2, 2)}{t^2} \leq \min(\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2}).$$

$$\int_{]0,+\infty[} \min(\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2}) \; d\lambda(t) = \int_0^2 \frac{1}{2} \; dt + \int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2} = 1 + 1 = 2 < +\infty,$$

   ce qui montre la convergence.1,5 point

Partie I 15 points

1. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc mesurable par rapport à la tribu borélienne.
   Comme $|\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \leq e^{-xt}$ et que $\int_{]0,+\infty[} e^{-xt} \; d\lambda(t) = \frac{1}{x} < +\infty$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. 1 point
2. Soit $a > 0$. On a $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} = -(1 - \cos t) e^{-xt}$, donc

$$\forall x \in]a, +\infty[\quad \forall t \in]0, +\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt}| = (1 - \cos t) e^{-xt} \leq 2e^{-at}.$$

   Comme $\int_{]0,+\infty[} 2e^{-at} \; d\lambda(t) = \frac{2}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de F sur $]a, +\infty[$, avec

$$F'(x) = \int_{]0,+\infty[} (\cos t - 1) e^{-xt} \; d\lambda(t) = \int_{]0,+\infty[} \cos t \; e^{-xt} \; d\lambda(t) - \frac{1}{x}.$$

   Comme $|e^{it} e^{-tx}| = e^{-tx}$, la fonction $t \mapsto e^{it} e^{-tx}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_{]0,+\infty[} e^{it} e^{-tx} \; d\lambda(t) &= \lim_{M \to +\infty} \int_{]0,M[} e^{it} e^{-tx} \; d\lambda(t) \\ &= \lim_{M \to +\infty} \frac{1 - e^{(i-x)M}}{x - i} = \frac{1}{x - i} = \frac{x + i}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

   On en déduit

$$\mathbf{Re} \left(\int_{]0,+\infty[} e^{it} e^{-tx} \; d\lambda(t) \right) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

soit
$$\int_{]0,+\infty[} \cos t e^{-tx}\ d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$
et finalement $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]a,+\infty[$. Comme tout $x > 0$ admet un voisinage de la forme $]a,+\infty[$ pour un certain $a > 0$ (par exemple $a = x/2$) , la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ s'ensuit.
3 points

3. $0 \le \frac{1-\cos t}{t} e^{-nt} \le e^{-nt}$, donc en intégrant $0 \le F(n) \le \frac{1}{n}$, ce qui entraîne $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$. Comme $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$, une primitive de F sur $]0,+\infty[$ est
$$\frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log x = \frac{1}{2}(\log(x^2+1) - \log x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}),$$
donc il existe K réel tel que
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}) + K.$$
En faisant $x = n$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $K = 0$, soit
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}).$$
3 points

4. D'après les majorations établies en préliminaire, on a
$$\forall x > 0 \quad \forall t > 0 \quad 0 \le \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \le \frac{1}{2} e^{-xt} \tag{1}$$
$t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}$ étant continue, la majoration (**??**) assure son intégrabilité. Ainsi G est bien définie.

   On a $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} = -\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$, donc
$$\forall x \in]a,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \le e^{-at}.$$
Comme $\int_{]0,+\infty[} e^{-at}\ d\lambda(t) = \frac{1}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de G sur $]a,+\infty[$, avec
$$G'(x) = -\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\ d\lambda(t) = -F(x).$$
Comme tout $x > 0$ admet un voisinage de la forme $]a,+\infty[$ pour un certain $a > 0$ (par exemple $a = x/2$) , la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ s'ensuit. 2 points

5. On trouve une primitive de F grâce à une intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2}\log(1+x^{-2})\ dx &= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) - \int \frac{x}{2}\frac{-2x^{-3}}{1+x^{-2}}\ dx \\ &= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) + \int \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ &= \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) + \arctan x\end{aligned}$$

Comme $G' = -F$, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1 + x^{-2}) - \arctan x.$$

1 point

6. En intégrant la majoration (**??**), on obtient pour tout $x > 0$ l'inégalité : $0 \le G(x) \le \frac{1}{2x}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$.
   En $+\infty$, $\log(1+x^{-2}) \sim x^{-2}$, donc $-\frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) \sim -\frac{1}{2x}$ et a donc une limite nulle en l'infini. Comme la fonction arctangente a une limite $\pi/2$ en l'infini, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} C - \frac{x}{2}\log(1 + x^{-2}) - \arctan x = C - \frac{\pi}{2}$, d'où $C = \frac{\pi}{2}$. 2 points
7. Avec la question 1), on a

$$\forall x \ge 0 \quad \forall t > 0 \quad \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \le \frac{\min(t^2/2, 2)}{t^2} e^{-xt} \le \min(\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2}).$$

Comme pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_{]0,+\infty[} \min(\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2})\ d\lambda(t) = \int_0^2 \frac{1}{2}\ dt + \int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2} = 1 + 1 = 2 < +\infty,$$

le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre nous dit que $x \mapsto \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\ d\lambda(t)$ est continue. En particulier

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t^2}\ d\lambda(t) = \lim_{x \to 0^+} \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}\ d\lambda(t) = \lim_{x \to 0^+} G(x).$$

Évaluons cette limite : on a pour $x > 0$

$$G(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\log(\frac{x^2 + 1}{x^2}) - \arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\log(1 + x^2) + x\log x - \arctan x.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} x \log x = 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = \frac{\pi}{2}$, soit

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t^2}\ d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\frac{1-\cos t}{t^2}$, est continue, positive, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, l'intégrale de Riemann impropre existe aussi et coïncide : on a ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\ dt = \frac{\pi}{2}.$$

3 points

Partie II 10 points

1. À x fixé, la fonction $t \mapsto \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt}$ est une fonction continue. Les intégrales $\int_{]0,+\infty[} |\frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt}| \, d\lambda(t)$ et $\int_0^{+\infty} |\frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt}| \, dt$ sont donc simultanément finies ou infinies. Or, la majoration vue en préliminaire $|\frac{1-\cos t}{t}| \le 1$ nous donne
$$|\frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt}| \le |\cos(t)| e^{-xt} \le e^{-xt}.$$
Comme $\int_{]0,+\infty} e^{-xt} \, d\lambda(t) = \frac{1}{x} < +\infty$, par comparaison les deux intégrales sont finies, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt} \, dt$ est absolument convergente et coïncide avec $\int_{]0,+\infty[} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt} \, d\lambda(t)$.
1,75 point
2. Posons $f(x,t) = \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt}$. Soit $A > 0$.
— Pour tout $t > 0$ $x \mapsto f(x,t)$ est continue ;
— On a pour tout $x > A$, pour tout $t > 0$:
$$|f(x,t)| \le e^{-xt} \le e^{-At};$$
— $\int_{]0,+\infty[} e^{-At} \, dt = \frac{1}{A} < +\infty$.
D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, $x \mapsto H(x)$ est donc continue sur $]A,+\infty[$. Comme la continuité est une propriété locale et que chaque point de $0,+\infty[$ a un voisinage de la forme $]0,+\infty[$, la continuité de H sur $]0,+\infty$ s'ensuit.1,75 point
3. Posons $\Omega =]0,+\infty[$ et montrons l'intégrabilité de f sur Ω^2. Comme $|f(x,t)| \le \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$, d'où pour tous $x, t > 0$, il suffit de montrer celle de $(x,t) \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$. Or, avec Tonelli
$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega} \frac{(1-\cos t)e^{-xt}}{t} \, d(\lambda\otimes\lambda)(x,t) &= \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{(1-\cos t)e^{-xt}}{t} \, d\lambda(x) \right) \, d\lambda(t) \\ &= \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} \, d\lambda(t) < +\infty,\end{aligned}$$
avec les préliminaires. La fonction f est donc intégrable sur Ω ; le théorème de Fubini dit que son intégrale est égale à $\int_{]0,+\infty[} F(x) \, d\lambda(x)$ d'une part (intégration en t, puis en x), et à
$$\int_{]0,+\infty[} \left(\int_{]0,+\infty[} f(x,t) \, d\lambda(x) \right) \, d\lambda(t)$$
d'autre part (intégration en x puis en t), soit $\int_{]0,+\infty[} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t^2} \, d\lambda(t)$.
2,5 points
4. La première égalité proposée $(1-\cos t)\cos t = (1-\cos^2 t) - (1-\cos t)$ est évidente. La deuxième provient de la formule de linéarisation de $\cos^2 t$: on a
$$\cos^2(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2it}+e^{-2it}+2}{4} = \frac{2\cos(2t)+2}{4} = \frac{1+\cos(2t)}{2}.$$

On a donc pour $t > 0$,

$$\frac{(1-\cos t)\cos t}{t^2} = \frac{1-\cos(2t)}{2t^2} - \frac{1-\cos t}{t^2}.$$

Or sait que $\frac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable ; par différence $\frac{1-\cos(2t)}{2t^2}$ l'est donc aussi et l'intégrale cherchée est la différence

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

Avec le changement de variable $u = 2t$, les deux intégrales sont égales, donc la différence est nulle.2 points

5. On raisonne par l'absurde et on suppose que H ne s'annule pas. Comme H est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, H est toujours strictement positive ou toujours strictement négative. Supposons que H est strictement positive. Comme H est continue en 1, il existe un voisinage $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ de 1 sur lequel H dépasse $H(1)/2$. On a alors $\int_0^{+\infty} H(x)\,dx \geq \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} H(x)\,dx \geq \varepsilon H(1) > 0$: contradiction. Le cas où H est strictement négative se traite de manière analogue.2 points

Partie III 11 points

1. Si $\alpha = 0$, la formule est immédiate (tout est nul). Pour $\alpha > 0$, le changement de variable $u = \alpha t$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha t}{t^2}\,dt = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\alpha$$

avec $I.7$ d'où le résultat voulu. Pour $\alpha < 0$, on utilise la parité de la fonction cosinus.0,5 point

2. La fonction $t \mapsto \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2}$ est bien positive.On a $\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2}\,d\lambda(t) = |1|$, donc μ est une mesure de probabilité.0,5 point

3. $\mathbb{P}(X \leq \alpha) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, \alpha]) = \mathbb{P}_X(]-\infty, \alpha]) = \mu(]-\infty, \alpha])$ On a

$$\begin{aligned}
\mu(]-\infty, \alpha]) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty,\alpha]}\,d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty,\alpha]}(x)\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)\,d\lambda(t) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{]0,\alpha]} \frac{1-\cos t}{t^2}\,d\lambda(t) \\
&\leq \frac{2}{\pi}\int_{]0,\alpha]} \frac{1}{2}d\lambda(t) = \frac{\alpha}{\pi}.
\end{aligned}$$

2,25 points

De même, $\mathbb{P}(X \geq \alpha) = \mathbb{P}(X \in [\alpha, +\infty[) = \mathbb{P}_X([\alpha, +\infty[) = \mu([\alpha, +\infty[)$

On a

$$\begin{aligned}
\mu([\alpha,+\infty[) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[\alpha,+\infty[}\ d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]\alpha,+\infty[}(x)\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)\ d\lambda(t) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{[\alpha,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2}\ d\lambda(t) \\
&\leq \frac{2}{\pi}\int_{[\alpha,+\infty[} \frac{2}{t^2} d\lambda(t) = \frac{4}{\pi\alpha}.\text{2,25 points}
\end{aligned}$$

4. Y étant bornée en valeur absolue par 1, elle admet des moments de tous ordres. Avec le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\cos X) &= \int_{\mathbb{R}} \cos(t)\ d\mathbb{P}_X(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cos(t)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2}\ d\lambda(t) \\
&= \int_{]0,+\infty[} \frac{2}{\pi}\frac{\cos t(1-\cos t)}{t^2}\ d\lambda(t) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[} \frac{\cos t(1-\cos t)}{t^2}\ d\lambda(t) = 0
\end{aligned}$$

d'après II.4.2 points

5. En procédant comme à la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}((\cos X)^2) &= \int_{\mathbb{R}} \cos^2(t)\ d\mathbb{P}_X(t) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[} \frac{(\cos t)^2(1-\cos t)}{t^2}\ d\lambda(t)
\end{aligned}$$

Pour $t>0$, on a

$$\begin{aligned}
(\cos t)^2(1-\cos t) = (\cos t)^2 - (\cos t)^3 &= (1-(\cos(t))^3) - (1-\cos(t)^2) \\
&= (1-(\cos(t))^3) - (\cos t)(1-\cos t) - (1-\cos(t))
\end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{(\cos t)^2(1-\cos t)}{t^2} = \frac{1-(\cos(t))^3}{t^2} - \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t^2} - \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

Les intégrales des deux derniers termes ont déjà été calculées : on a

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[} \frac{(\cos t)^2(1-\cos t)}{t^2}\ d\lambda(t) &= \frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[} \frac{1-(\cos(t))^3}{t^2}\ d\lambda(t) \\
&\quad - \frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t^2}\ d\lambda(t) \\
&\quad - \frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ d\lambda(t) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[} \frac{1-(\cos(t))^3}{t^2}\ d\lambda(t) - 0 - 1.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } (\cos t)^3 = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3it}+e^{-3it}+3e^{it}+3e^{-it}}{8}$$
$$= \frac{2\cos(3t)+6\cos(t)}{8} = \frac{\cos(3t)+3\cos(t)}{4}$$

D'où $\dfrac{1-(\cos t)^3}{t^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1-\cos(3t)}{t^2} + \dfrac{3}{4}\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$, puis

$$\frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[}\frac{1-(\cos t)^3}{t^2}\,d\lambda(t) = \frac{1}{4}\frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[}\frac{1-\cos(3t)}{t^2}\,d\lambda(t) + \frac{3}{4}\frac{2}{\pi}\int_{]0,+\infty[}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,d\lambda(t),$$
$$= \frac{1}{4}\times 3 + \frac{3}{4}\times 1 = \frac{3}{2}.$$

On a donc $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ et finalement

$$\mathrm{Var}\,(Y) = \mathbb{E}((Y-\mathbb{E}Y)^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{2}. \quad \text{3,5 points}$$