DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto-verso A4
Session 1	☐ Documents autorisés
Date : 18 janvier 2024	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–12H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé d'un problème. Les résultats de la partie des préliminaires peuvent être mobilisés dans chaque partie. La partie II peut être traitée indépendamment de la partie I. La partie III utilise des résultats des parties I et II, qui seront systématiquement mentionnés. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

Barème indicatif, par partie : 4–13–11–10.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

*** Partie zéro (Préliminaires) ***

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, puis que pour tout $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$.
2. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$.

*** Partie I ***

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\, d\lambda(t).$$

2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$. Indication : on pourra commencer par fixer un réel $a > 0$ et travailler sur $]a, +\infty[$.

3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$. En déduire que

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1 + x^{-2}).$$

4. On pose pour $x > 0$:
$$G(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \, d\lambda(t).$$
Vérifier que G est bien définie, puis montrer que G est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec $G' = -F$.
5. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \operatorname{atan} x.$$
6. Déterminer la valeur de C (Indication : on pourra calculer de deux manières différentes la limite de G en $+\infty$).
7. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

*** Partie II ***

Pour $x > 0$, on pose $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt} \, dt$.

1. Vérifier que H est bien définie et l'écrire sous forme d'une intégrale de Lebesgue.
2. Montrer que $x \mapsto H(x)$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.
Remarque : il serait possible de démontrer que H admet un prolongement continu à $[0,+\infty[$, mais ce n'est pas demandé ici.
3. Montrer que H est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que
$$\int_{]0,+\infty[} H(x) \, d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t^2} \, d\lambda(t).$$
4. Montrer que cette intégrale est nulle. Indication : on pourra commencer par justifier l'identité, pour t réel :
$$(1-\cos t)\cos t = (1-\cos^2 t) - (1-\cos t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} - (1-\cos t).$$
5. Montrer qu'il existe $x > 0$ tel que $H(x) = 0$.

*** Partie III ***

Soit μ la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont une densité par rapport à la mesure de Lebesgue est
$$t \mapsto \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t).$$

1. À l'aide de I.7, montrer que pour tout α réel,
$$\int_{]0,+\infty[} \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos \alpha t}{t^2} \, d\lambda(t) = |\alpha|.$$
2. Montrer que μ est une mesure de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi μ. À l'aide des préliminaires, montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(X \leq \alpha) \leq \frac{\alpha}{\pi}$ et $\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{4}{\pi\alpha}$.
4. On pose $Y = \cos(X)$. À l'aide de II.4, montrer que Y est centrée.
5. ♣ Montrer que $\operatorname{Var} Y = \frac{1}{2}$.
Indication : on pourra s'inspirer de II.4 et utiliser III.1.

FIN