DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto-verso A4
Session 1	☐ Documents autorisés
Date : 9 janvier 2023	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–12H00	■ Calculatrice non autorisée

Barème approximatif : exercice 1 : 13 points, exercice 2 : 3 points, exercice 3 :4 points exercice 4 : 3 points, exercice 5 : 3 points

Exercice 1.

1. Soit $z = c + id$ un nombre complexe, avec $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt}\, d\lambda(t) = \frac{1}{z}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. En déduire que, pour tout réel a, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos ax}{e^x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
4. On pose, pour a un réel quelconque
$$F(a) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1-\cos ax}{e^x - 1}\, d\lambda(x).$$
Soit A un réel quelconque. Montrer que F est continue sur $]-A, A[$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Soit a un réel quelconque. Étudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n^a(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1-\cos(ax))e^{-(k+1)x}$.
6. Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} f_n^a(x)\, d\lambda(x)$ tend vers $F(a)$ quand n tend vers l'infini.
7. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$
$$F(a) = a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2+a^2)}.$$

Exercice 2. Soit

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1 - |z|\right\}.$$

Calculer le volume de D.
Indication : on pourra procéder à une intégration par tranches, comme on a fait dans le cours pour le calcul du volume du cône.

Exercice 3. On suppose que des variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes, avec $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Y \sim \mathcal{U}([0,2])$.

1. Montrer que (X, Y) suit la loi uniforme sur un compact de $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.
2. Que vaut $\mathbb{P}(Y \leq X)$?
3. Montrer qu'il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{P}(Y \leq X^\alpha) = \frac{1}{3}$.

Exercice 4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $\alpha > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de $\max(X^\alpha, Y^\alpha)$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de α, $\max(X^\alpha, Y^\alpha)$ a-t-elle la même loi que X ?

Exercice 5. On suppose que X est une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F_X vérifie :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t/4 & \text{si } t \in [0, 1[\\ t/2 & \text{si } t \in [1, 2[\\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

1. Montrer que la loi de X s'écrit $\mathbb{P}_X = \frac{1}{4}\delta_1 + f.\lambda$, où f est une fonction que l'on déterminera.
2. Calculer $\mathbb{E}(X) - \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, d\lambda(x)$, où f est la fonction déterminée à la question précédente.

FIN

1 Solutions

Solution 1 1. Pour a, b réels, on a $|e^{a+ib}| = |e^a e^{ib}| = |e^a|.|e^{ib}| = e^a.1$
En particulier $|e^{-zt}| = e^{-ct}$, et

$$\int_{\mathbb{R}^+} |e^{-zt}| \; d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ct} \; d\lambda(t) = \frac{1}{c} < +\infty,$$

donc $z \mapsto e^{-zt}$ est intégrable. On a

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \; d\lambda(t) = \lim_{N \to +\infty} \int_{[0,N]} e^{-zt} \; d\lambda(t)$$

Or,

$$\int_{[0,N]} e^{-zt} \; d\lambda(t) = \int_0^N e^{-zt} \; dt = \frac{1 - e^{-zN}}{z}.$$

Comme $|e^{-zN}| = e^{-cN} \to 0$ quand $N \to +\infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \; d\lambda(t) = \frac{1}{z}.$$

Note : rares sont ceux qui ont pensé à justifier que $\lim_{N \to +\infty} e^{-zN} = 0$.

2. — Solution 1 : La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est clairement continue sur $]0, +\infty[$. En 0, $e^x = 1 + x + o(x)$, donc $e^x - 1 \sim x$ et $\frac{x}{e^x-1} \sim 1$: f admet un prolongement par continuité en 0 : l'intégrale est donc « faussement impropre »en 0. La fonction est donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, seul le comportement à l'infini reste à étudier. Or $\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{e^{x/2}} \frac{x}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$. En l'infini $\frac{x}{e^{x/2}-e^{-x/2}} \sim \frac{x}{e^{x/2}}$ tend vers 0 avec les croissances comparées classiques. Ainsi $f(x) = o(e^{-x/2})$ en l'infini. Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'intégrabilité de f en l'infini, et finalement sur $\mathbb{R}_+$.
   — Solution 2 : Pour tout $x \geq 0$, on a $x \leq \sinh(x)$, et en particulier $x/2 \leq \sinh(x/2)$. Pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$. Ainsi

$$0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{2 \sinh(x/2)}{e^x - 1} = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^x - 1} = e^{-x/2}.$$

   Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le résultat s'ensuit.

3. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout t réel, on a $|1-\cos t| \leq |t|$. En particulier, pour $x \geq 0$,

$$|\frac{1-\cos ax}{e^x-1}| \leq \frac{|ax|}{e^x-1} = |a|\frac{x}{e^x-1}$$

et l'intégrabilité découle de celle de f.

4. — Solution 1 : Fixons $A > 0$. On a
   — Pour tout $x \geq 0$, $a \mapsto \frac{\sin ax}{e^x-1}$ est continue sur $[-A, A]$.
   — Pour tout $x \geq 0$, pour tout $a \in [-A, A]$, on a

$$|\frac{|1-\cos ax|}{|e^x-1|} \leq \frac{|ax|}{|e^x-1|} = |a|\frac{x}{e^x-1} \leq A\frac{x}{e^x-1} = Af(x).$$

   — $\int_{\mathbb{R}_+} Af(x)\ d\lambda(x) < +\infty$ d'après la question précédente.
   D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, F est continue sur $[-A, A]$. Comme la continuité est une propriété locale et que tout point de $\mathbb{R}$ a un voisinage de la forme $[-A, A]$, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.
   — Solution 2 : Pour a, b dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|F(a)-F(b)| &= |\int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\cos(bx)-\cos(ax))}{e^x-1}\ d\lambda(x)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+} |\frac{(\cos(bx)-\cos(ax))}{e^x-1}|\ d\lambda(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|ax-bx|}{e^x-1}\ d\lambda(x) \\
&\leq C|a-b|,
\end{aligned}$$

   avec $C = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{e^x-1}\ d\lambda(x) < +\infty$. Ceci montre que F est C-lischitzienne. En particulier, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5. Pour $x = 0$, la suite $f_n^a(x)$ est identiquement nulle. Sinon, pour $x > 0$, on reconnait la suite des sommes partielles de la série géométrique de premier terme $(1-\cos(ax))e^{-x}$ et de raison e^{-x} avec $0 \leq e^{-x} < 1$: la limite lorsque n tend vers l'infini est

$$(1-\cos(ax))e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}}.$$

Dans tous les cas $f_n^a(x)$ tend vers $(1-\cos(ax))e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}}$.

6. On a simplement

$$\begin{aligned}
|f_n^a(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |(1-\cos(ax))e^{-(k+1)}| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} ||ax|e^{-(k+1)} \\
&\leq |a| \sum_{k=0}^{+\infty} xe^{-(k+1)} = |a| \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = |a|f(x)
\end{aligned}$$

Comme $|a|f$ est intégrable, on obtient par le théorème de convergence dominée que la limite des intégrales est l'intégrale de la limite, soit $F(a)$.

On pouvait aussi procéder par convergence monotone, ce qu'ont fait de nombreuses copies.

7. On a

$$f_n^a(x) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1-e^{iax})e^{-(k+1)x}\right) \quad = \Re\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1-ia)x}\right)\right)$$

La fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1}(e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1-ia)x})$ est intégrable comme somme de n fonctions intégrables (voir la question 1) et l'intégrale de la somme est la somme des intégrales :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1-ia} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k-ia}.$$

L'intégrale de f_n^a en est la partie réelle, soit

$$\begin{aligned}
\Re \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k-ia} &= \Im \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{k+ia}{k^2+a^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{k}{k^2+a^2} \\
&= a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k^2+a^2)},
\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu avec la question précédente.

Solution 2 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$ est le produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En appliquant la définition de la mesure produit, ou le théorème de Tonelli, on a

$$\lambda^3(D) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(D_z), \text{ avec } D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y,z) \in D\} \; d\lambda(z)$$

On a

$$D_z = \begin{cases} B(0, \sqrt{1-|z|}) & \text{si } |z| \leq 1 \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases},$$

d'où

$$\lambda^2(D_z) = \begin{cases} \pi(1-|z|) & \text{si } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

Ainsi

$$\lambda^3(D) = \pi \int_{-1}^{1} (1-|z|) \; dz = 2\pi \int_0^1 (1-z) \; dz = \pi.$$

Solution 3

1. X et Y sont des variables aléatoires indépendantes à densité, donc leur couple est à densité, donnée par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,2]}(y) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,2]}(x,y),$$

ce qui montre que (X,Y) suit la loi uniforme sur le rectangle $R = [0,1]^2$.

2. Si on pose $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x\}$, on a

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(H) = [\mathcal{U}(R)](H) = \frac{\lambda^2(R \cap H)}{\lambda^2(R)}.$$

Or $C \cap H$ est un triangle rectangle de petit côté unité, donc

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}.$$

3. Posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x^\alpha$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq X^\alpha) =& \mathbb{P}_{(X,Y)}(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_E(x,y) \; d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y) \mathbb{1}_E(x,y) \; d\lambda^2(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,2]}(y) \mathbb{1}_{y \leq x^\alpha} \; d\lambda^2(x,y). \end{aligned}$$

On applique alors le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq X^\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,2]}(y) \mathbb{1}_{y \leq x^\alpha} \, d\lambda(y) \right) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,2]}(y) \mathbb{1}_{y \leq x^\alpha} \, d\lambda(y) \right) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 \leq y \leq \min(x^\alpha, 2)} \, d\lambda(y) \right) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 \leq y \leq x^\alpha} \, d\lambda(y) \right) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} x^\alpha \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha + 1}
\end{aligned}$$

Il est alors clair que $\mathbb{P}(Y \leq X^\alpha) = \frac{1}{3}$ si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$.

Solution 4 1. Clairement, $\max(X^\alpha, Y^\alpha)$ prend ses valeurs entre 0 et 1 donc $\mathbb{P}(\max(X^\alpha, Y^\alpha)$ est nul pour $t < 0$ et vaut 1 pour $t \geq 1$. Pour t entre 0 et 1, on a

$$\mathbb{P}(\max(X^\alpha, Y^\alpha) \leq t) = \mathbb{P}(X^\alpha \leq t, Y^\alpha \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^{1/\alpha}, Y \leq t^{1/\alpha}).$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}(\max(X^\alpha, Y^\alpha) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^{1/\alpha})\mathbb{P}(Y \leq t^{1/\alpha}) = t^{1/\alpha}.t^{1/\alpha},$$

car X et Y suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Finalement,

$$\mathbb{P}(\max(X^\alpha, Y^\alpha) \leq t) = t^{2/\alpha}$$

2. La fonction de répartition caractérise la loi : $\max(X^\alpha, Y^\alpha)$ a la même loi que X si et seulement si $\mathbb{P}(\max(X^\alpha, Y^\alpha) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour tout t. C'est évidemment réalisé si $t \notin [0,1]$, et entre 0 et 1, comme $\mathbb{P}(X \leq t) = t$, on aura l'égalité si et seulement si $\alpha = 2$.

Solution 5 1. F_X est clairement C^1 par morceaux, donc la loi de X est la somme d'une loi discrète et d'une loi à densité. L'unique discontinuité de F_X est au point 1, avec une valeur en 1 : $F_X(1) = 1/2$ tandis que la limite à gauche en 1 vaut 1/4. Le saut $(1/2 - 1/4 = 1/4)$ donne le poids du point 1 (seul point chargé) dans la partie discrète, qui est donc $\frac{1}{4}\delta_1$. La densité de la partie à densité est donnée par la dérivée de la fonction de répartition, soit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/4 & \text{si } t \in [0, 1[\\ 1/2 & \text{si } t \in [1, 2[\\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

2. Avec le théorème de transfert, puis le théorème d'intégration par rapport à une mesure à densité, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x \; d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} x \; d\delta_1(x) + \int_{\mathbb{R}} x \; d(f.\lambda)(x) \\ &= \frac{1}{4} + \int_{\mathbb{R}} x f(x) \; d\lambda(x), \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}(X) - \int_{\mathbb{R}} x f(x) \; d\lambda(x) = \frac{1}{4}$.