DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ 1 recto-verso autorisé
Session 2	☐ Documents non autorisés
Date : 24 janvier 2022	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–12H00	■ Calculatrice non autorisée

Les calculatrices sont interdites. Comme unique document, un recto-verso au format A4 est autorisé

On rédigera les deux problèmes sur des copies séparées. La répartition des points du barème entre les deux parties sera assez équilibrée (au moins 8 points sur chaque partie).

Exercice 1 On note ψ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par la relation

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right) dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,+\infty[$. En déduire que ψ est bien définie.
2. Soient a, b des réels avec $0 < a < b$. Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $x \in]a,b[$, on a

$$\left| \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right| \le \left| \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}} \right| + \left| \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}} \right|.$$

   Montrer que ψ est continue sur $]a,b[$, puis que ψ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ définie par $u_n = H_n - \log n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite.
   Indication : on pourra étudier la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \ge 1$,

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}} \, dt.$$

   Indication : on pourra calculer la somme $e^{-t} + e^{-2t} + \cdots + e^{-nt}$.

5. Pour $u > 0$, on pose
$$F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} \, dt.$$
Vérifier que F est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'elle est dérivable. En déduire la valeur de F.
6. On pose
$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right) \, dt.$$
Déterminer la limite de J_n quand n tend vers l'infini.
7. *Hors barème, pour la culture, à chercher chez vous*
Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\psi(1) = \log n + J_n - H_{n-1}$.
8. *Hors barème, pour la culture, à chercher chez vous*
En déduire que $\gamma = -\psi(1)$.

Exercice 2 On suppose que X suit la loi Bêta $\beta(2,2)$, c'est à dire que X est une variable aléatoire qui prend des valeurs dans $[0,1]$ et admet la densité $f_X(x) = 6x(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

1. Pour h continue bornée, exprimer $\mathbb{E}(h(X))$ et $\mathbb{E}(h(1-X))$ sous forme d'une intégrale. En déduire que X et $1-X$ ont même loi. On rappellera explicitement l'énoncé du théorème de cours utilisé.
2. Calculer, si elles existent
   (a) $\mathbb{E}(X)$;
   (b) $\mathbb{E}(\frac{1}{X})$;
   (c) $\mathbb{E}(\log(X))$.
3. On note F_X la fonction de répartition de X. Montrer que
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2(3-2t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$
4. On pose $Y = -\log(X)$. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?
Pour $t > 0$, montrer que
$$\mathbb{P}(Y > t) = F_X(e^{-t}).$$
5. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, et que la densité f_Y vérifie
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_Y(t) = e^{-t} f_X(e^{-t}).$$
6. Montrer que pour tout entier naturel k, on a
$$\mathbb{E}(Y^k) = 6k! \left((\frac{1}{2})^{k+1} - (\frac{1}{3})^{k+1} \right)$$
On rappelle que pour tout entier naturel n,
$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt = \Gamma(n+1) = n!.$$
7. Calculer Var (Y).

FIN

Correction

Solution 1 1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. Observons le comportement lorsque t tend vers 0. On a

$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = \frac{(1-e^{-t})e^{-t} - te^{-xt}}{t(1-e^{-t})}.$$

En 0, on a $1 - e^{-t} \sim t$, d'où $t(1-e^{-t}) \sim t^2$. Pour le numérateur,

$$\begin{aligned} e^{-t} - e^{-2t} - te^{-xt} &= (1 - t + O(t^2)) - (1 - 2t + O(t^2)) - t(1 + O(t)) \\ &= (t + O(t^2)) - (t + O(t^2)) \\ &= O(t^2). \end{aligned}$$

Finalement $\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = O(1)$ au voisinage de 0 ce qui donne l'intégrabilité sur $]0, \max(1,x)]$. Pour $t \in [\max(1,x), +\infty[$, on a

$$|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}| \le \frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \le e^{-t} + \frac{1}{1-e^{-x}}e^{-xt},$$

ce qui donne l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$. L'intégrabilité d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ entraîne la convergence de l'intégrale de Riemann impropre correspondante, donc $\psi(x)$ est bien défini. 2 points

2. Soient a, b avec $0 < a < b < +\infty$. Si $x \in [a, b]$, on a pour tout $t > 0$

$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}} \le \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \le \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}},$$

d'où

$$|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}| \le |\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}}| + |\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}}|.$$

Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $[a, b]$. Comme $|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}}| + |\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}}|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, on en déduit la continuité de ψ sur $[a, b]$. En particulier, pour tout $x > 0$, ψ est continue sur $[x/2, 2x]$ qui est un voisinage de x : ψ est donc bien continue sur $]0, +\infty[$ tout entier. 2 points

3.

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1)) \\ &= \frac{1}{n} + \log(1 - 1/n) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \\ &= O(\frac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais $\sum_{k=2}^{n}(u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n\ge1}$ converge. 1 point

4. Pour tout $t > 0$, on a

$$e^{-t} + e^{-2t} + \cdots + e^{-nt} = \frac{e^{-t}(1 - e^{-nt})}{1 - e^{-t}} = \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}.$$

En intégrant entre 0 et $+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} e^{-kt} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}.$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-kt} = \frac{1}{k}$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} = H_n.$$

2 points

5. À u fixé, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. En outre, $\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} = u - 1$, donc la fonction se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale est "faussement impropre" en 0. En l'infini, on a $\frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} = O(e^{-(\min(1,u)t)})$, d'où la convergence de l'intégrale. Par ailleurs $\frac{\partial}{\partial u} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} = e^{-ut}$, ce qui nous donne pour tout $a > 0$

$$\forall u \in [a, +\infty[\quad \forall t > 0 \quad |\frac{\partial}{\partial u} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t}| = e^{-ut} \leq e^{-at}.$$

Or $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable, indépendante de u donc $u \mapsto F(u)$ est C^1 sur $]a, +\infty[$, avec $F'(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ut}\, dt = \frac{1}{u}$. Comme a est quelconque strictement positif, le résultat est bien C^1 sur $]0, +\infty[$ tout entier avec $F'(u) = \frac{1}{u}$. Ainsi pour $x > 0$, $F(x) = F(1) + \int_1^x F'(u)\, du = 0 + \int_1^x \frac{du}{u} = \log x$.2 points

6. Il est facile de voir que pour tout $n \geq 1$, on a

$$|e^{-nt} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right) | \leq e^{-t} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right|.$$

Comme pour tout $t > 0$, $\lim_{n\to+\infty} e^{-nt} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right)$, si l'on montre que $e^{-t} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right)$ est intégrable, le théorème de convergence dominée permettra de conclure que la limite de J_n. Or nous avons déjà démontré que $e^{-t} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right)$ est intégrable : c'est la fonction dont l'intégrale définit la valeur de $\psi(1)$.1 point

7. On a

$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-nt}}{t} + \frac{e^{-nt}}{t} - \frac{e^{-nt}}{1 - e^{-t}} + \frac{e^{-nt}}{1 - e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}},$$

D'où en intégrant entre 0 et $+\infty$, $\psi(1) = F(n) + J_n - H_{n-1}$, où on a utilisé la question 4 pour la dernière identité. Avec la question 5. , on a $\psi(1) = \log n + J_n - H_{n-1}$.

8. $\log(n-1) = \log n + \log(1 - 1/n)$, donc $\psi(1) = \log(1 - 1/n) + J_n - (H_{n-1} - \log(n-1))$. Lorsque n tend vers l'infini, $\log(1 - 1/n)$ tend vers 0, J_n vers 0, et $H_{n-1} - \log(n-1)$ vers γ, d'où $\psi(1) = -\gamma$.

Solution 2

1. Avec le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x)\ d\lambda(x) = \int_0^1 h(x) f_X(x)\ dx.$$

D'autre part, toujours avec le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(h(1-X)) = \int_{\mathbb{R}} h(1-x) f_X(x)\ d\lambda(x) = \int_0^1 h(1-x) f_X(x)\ dx$$

Cependant, on a $f_X(x) = f_X(1-x)$, donc on a aussi

$$\mathbb{E}(h(1-X)) = \int_0^1 h(1-x) f_X(1-x)\ dx = \int_0^1 h(y) f_X(y)\ dy,$$

où la dernière égalité vient du changement de variable $y = 1-x$. Ainsi, pour toute fonction f continue bornée, $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(1-X))$, ce qui montre que X et $1-X$ ont même loi.2 points

2. X, $1/X$ et $\log(X)$ sont toutes les trois de signe constant (positif, positif, négatif), donc les espérances ont toujours un sens, éventuellement elles pourraient être infinies. On a

   (a)

   $$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x)\ dx = \int_0^1 6x^2(1-x)\ dx = 6(1/3-1/4) = 1/2.$$

   1 point

   (b)

   $$\mathbb{E}(1/X) = \int_0^1 x^{-1} f_X(x)\ dx = \int_0^1 6(1-x)\ dx = 6(1-1/2) = 1/2.$$

   1 point

   (c)

   $$\mathbb{E}(\log(X)) = \int_0^1 \log(x) f_X(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log(x)(6x - 6x^2)\ dx$$

   Or, une intégration par parties donne

   $$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \log(x)(6x-6x^2)\ dx &= [\log(x)3x^2 - 2x^3]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}(3x^2 - 2x^3)\ dx \\ &= [x\log(x)(3x - 2x^2)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 (3x - 2x^2)\ dx\end{aligned}$$

   Comme $\lim_{\varepsilon\to 0^+} x\log(x) = 0$, la limite en zéro vaut

   $$-\int_0^1 3x - 2x^2\ dx = -(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}) = -\frac{5}{6}.$$

   1 point

3. Comme X prend ses valeurs entre 0 et 1, on a $F_X(t) = 0$ pour $t < 0$ et $F_X(t) = 1$ pour $t > 1$. Pour t entre 0 et 1, on a
$$\begin{aligned} F_X(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) &= \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{]\infty,t]} d\mathbb{P}_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{]\infty,t]} f_X(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[0,t]} 6x(1-x) d\lambda(x) \\ &= \int_0^t 6x - 6x^2 \ dx = 3t^2 - 2t^3 = t^2(3-2t). \end{aligned}$$
1 point
4. X prend presque sûrement ses valeurs dans $[0, 1]$, et X est à densité donc $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et X prend presque sûrement ses valeurs dans $]0, 1]$, donc $Y = -\log(X)$ prend presque sûrement ses valeurs dans $[0, +\infty[$. Pour t réel et $x > 0$, on a $(-\log(x) > t) \iff (x < e^{-t})$, donc $\{Y > t\} = \{X < t\}$ et
$$\mathbb{P}(Y > t) = \mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - 0 = F_X(t).$$
1 point
5. Soit g une fonction continue bornée. En appliquant le résultat de 1. à la fonction $h(x) = g(-\log x)$, on a
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X)) &= \int_0^1 g(-\log x) f_X(x) \ dx \\ &= \int_0^{+\infty} g(t)e^{-t} f_X(e^{-t}) \ dt \quad = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[0,+\infty[}(t) g(t)e^{-t} f_X(e^{-t}) \ d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-t} f_X(e^{-t}) \ d\lambda(t), \end{aligned}$$
où on a utilisé le changement de variable $x = e^{-t}$ et le fait que f_X est nulle sur $]-\infty, 0[$. Comme g a été prise continue bornée quelconque, cela permet d'identifier la loi de X avec la mesure de densité $t \mapsto e^{-t} f_X(e^{-t})$ par rapport à la mesure de Lebesgue.1 point
6. En utilisant la question précédente et l'expression de f_X, on a pour t réel $f_Y(t) = (6e^{-2t} - 6e^{-3t}) 1\!\!1_{[0,1]}(e^{-t}) = (6e^{-2t} - 6e^{-3t}) 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(t)$, donc
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^k) &= \int_{\mathbb{R}} t^k (6e^{-2t} - 6e^{-3t}) 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(t) \\ &= \int_0^{+\infty} t^k (6e^{-2t} - 6e^{-3t}) \ dt \\ &= 6I_{k,2} - 6I_{k,3}, \end{aligned}$$
avec
$$\begin{aligned} I_{k,\alpha} &= \int_0^{+\infty} t^k e^{-\alpha t} \ dt \\ &= \frac{1}{\alpha^{k+1}} \int_0^{+\infty} (\alpha t)^k e^{-\alpha t} \ \alpha dt \\ &= \frac{1}{\alpha^{k+1}} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} \ du \\ &= \frac{1}{\alpha^{k+1}} k! \end{aligned}$$
d'où $\mathbb{E}(Y^k) = 6k!(2^{-(k+1)} - 3^{-(k+1)})$.1 point

7. En particulier, $\mathbb{E}(Y) = 6(1/4 - 1/9) = 6\frac{5}{36} = \frac{5}{6}$, ce qui est cohérent avec le résultat de 2(c), et $\mathbb{E}(Y^2) = 6.2.(1/8 - 1/27) = \frac{3}{2} - \frac{4}{9} = \frac{19}{18}$. Finalement, Var $(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{13}{36}$.

1 point