Intégration et probabilités
Examen du 17 Décembre 2020, 10H30

Instructions : *Rédiger séparément chacune des 2 parties, la 1ère partie sur une copie, la 2ème partie sur des feuilles* **simples RECTO**, *et placer chacune de ces 2 parties sur leur pile respective à la fin de votre examen.*
Barème indicatif: $24 = 7 + 7 + 10$ *points, 23/24 =20/20, 18/24=18/20.* **Durée :** *1 heure 30.*

Partie I

Exercice 1. **(7 points)** Pour $n \geq 1$ et $a > 0$, on pose

$$I_n(a) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-ax} dx.$$

Montrer que la suite $(I_n(a))_{n\geq 1}$ est convergente, et calculer explicitement sa limite. *Indication:* faire apparaître une fonction indicatrice.

Partie II

Exercice 2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

1. **(2=1+1 points)** Trouver l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $B(x, y) < +\infty$. Montrer que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$B(x, y) = B(y, x).$$

2. **(5 points)** Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sum_{k \geq 0} B(x, y+k) = B(x-1, y).$$

C'est toujours la partie II

Exercice 3. **(10 points)** On se donne une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes ayant la même densité de probabilité $f(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$L_n(\omega) = \min\{U_k(\omega) \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

1. **(3 points)** Calculer la fonction de répartition de U_1. Calculer $\mathbb{P}(L_n > x)$, et en déduire la fonction de répartition de L_n.

2. **(2 points)** Montrer que L_n a pour densité de probabilité la fonction g_n, définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

   $$g_n(x) = n(1-x)^{n-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(x).$$

   Calculer $\mathbb{E}[L_n]$.

3. **(1 point)** On note B l'évènement

   $$\{\exists n \geq 1 \text{ tel que } L_n \leq 0\}.$$

   Montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$. Montrer que L_n converge simplement vers une variable aléatoire, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, qu'on notera L, et que $L \geq 0$ p.s.[1].

4. **(4 points)** À l'aide de la question 2, montrer que $L = 0$ p.s..

[1] *p.s.* signifie *presque sûrement*.