Intégration et probabilités
Examen du 2020-01-13

Barème : $6+5+5,5+7+5 = 28,5$ *points.* **Durée :** *3 heures.*

Instructions : *Rédiger séparément chacune des 2 parties sur des copies différentes, et placer chacune de ces 2 copies sur leur pile de copies à la fin de votre examen. Une feuille A4 rectoverso d'antisèche est autorisée.*

Pendant cette interrogation, on pourra utiliser les inégalités suivantes (*sans les démontrer ...*) :

$$\{e^x \geq 1+x,\ \forall x \in \mathbb{R}\},\ \{|\sin(x)| \leq |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}\},\ \left\{\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},\ \forall a,b \in \mathbb{R}_+^*\right\},$$
$$\left\{\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b},\ \forall a,b \in \mathbb{R}_+\right\},\ \{\ln(x) \leq x-1,\ \forall x > 0\}.$$

Partie I

Exercice 1. (0,5+4,5+1 pts)

1. Montrer que la fonction

$$t \longrightarrow F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

   est bien définie sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, et calculer F'.

3. Calculer $\lim_{+\infty} F(t)$. Montrer que $\forall t > 0,\ F(t) = \pi/2 - \arctan(t)$.

Remarque : Prolonger F en 0, en posant $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi/2$, demande une justification, mais c'est un autre problème.

Partie II

Exercice 2. (0,5+1,5+3 pts)

1. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la fonction

$$f_n(t) = \frac{1}{1+t+t^n}$$

   est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? Pour ces valeurs de n, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

2. Calculer $\lim_n I_n$.

3. À l'aide du changement de variable $u = t^n$, montrer que

$$I_n \sim \frac{\ln \sqrt{3}}{n}.$$

Exercice 3. La variable X a pour densité $f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

1. **(1+0,5 pts)** Calculer $m_k = \mathbb{E}\left[X^k\right]$ pour $k \geq 0$, Var (X).

2. **(2 pts)** Calculer la densité de $Y = X^2$.

3. **(2 pts)** Discuter si $\mathbb{P}(|X| \geq 1/2) - \frac{1}{2}$ est positif, négatif ou nul (on peut éviter les calculs de fractions).

Exercice 4. (3+4 pts) On se donne 2 v.a.r. indépendantes $X, Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ayant même espérance, et on pose $m = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$. On pose $U = \sup(X, Y)$, $V = \inf(X, Y)$ et on note $x = \mathbb{E}[U]$.

1. Exprimer Cov (U, V) en fonction de m et x et en déduire que Cov (U, V) est positive ou nulle.

2. Montrer que U et V sont non corrélées (i.e. Cov $(U, V) = 0$) si et seulement si X et Y sont constantes et égales à m.

Exercice 5. (5 pts) On jette 1 point au hasard sur le segment [0,1], et on note X son abscisse, puis indépendamment, on jette un deuxième point au hasard, et on note son abscisse Y. Quelle est la probabilité que les trois segments ainsi découpés puissent former les trois côtés d'un triangle ?