# Intégration et probabilités
# Examen du 2019-01-10

**Instructions :** *Rédiger chacune des 2 parties sur des copies différentes, et placer chacune de ces 2 copies sur leur pile de copies à la fin de votre examen.* **Barème :** $4 \times 6 = 24$ *points.*
**Durée :** *3 heures.*

## Partie I

**Exercice 1.** Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\; e^{-x^2} dx.$$

**a.** Montrer que $F$ est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

**b.** On admet que $F(0) = \sqrt{\pi}$. Montrer que $F$ est solution de l'équation différentielle $y' = -xy/2$, puis calculer $F(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

## Partie II

**Exercice 2.** Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (-\ln x)^p \, dx.$$

**a.** Montrer que pour $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, on a $(n+1)\, I_{n,p} = p I_{n,p-1}$, et en déduire la valeur de $I_{n,n}$.

**b.** Montrer que

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}.$$

**Exercice 3.** On se donne 2 densités de probabilité, $f$ et $g$, strictement positives (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \{f(x) > 0$ et $g(x) > 0\}$). On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq Cg(x)$.

**a.** Montrer que $C \geq 1$.

**b.** On se donne 2 v.a.r. indépendantes $X$ et $U$, de densités respectives $g$ et $\mathbb{1}_{[0,1]}$, ainsi qu' une v.a.r. $Y$ de densité $f$, et on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h(x) = \frac{f(x)}{Cg(x)}.$$
Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}(U \leq h(X) \text{ et } X \leq a) = \frac{1}{C}\mathbb{P}(Y \leq a).$$
Calculer $\mathbb{P}(U \leq h(X))$.

**Exercice 4.** On note $\{x\}$ la partie fractionnaire $x - \lfloor x \rfloor$ du réel $x$, et on se donne un réel $a \in [0,1]$, et une v.a.r. $U$ de densité de probabilité $\mathbb{1}_{[0,1]}$.

**a.** Montrer que $V_a = \{U + a\}$ a même loi que $U$.

**b.** On considère le point $M$ de $\mathbb{R}^2$ ayant pour coordonnées
$$((\cos(2\pi U), \sin(2\pi U))$$
dans la base canonique, c'est-à-dire, un point $M$ tiré au hasard, uniformément, sur le cercle unité. On trace l'intersection $N = (1, Y)$ de la droite $OM$ avec la droite d'équation $x = 1$, puis l'intersection $P = (Z, 1)$ de la droite $OM$ avec la droite d'équation $y = 1$. Montrer que $\mathbb{P}(Y \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$. Quelle est la loi de la v. a-r. $Y$ ? Montrer que $ZY = 1$.

**c.** Pour $a = 1/4$ et $M'$ de coordonnées $((\cos(2\pi V_a), \sin(2\pi V_a))$, soit $P' = (Z', 1)$ l'intersection des 2 droites $OM'$ et $\{y = 1\}$. Sans aucun calcul, montrer successivement que $Z'$ et $Z$ ont même loi, puis que $Z'$ et $Y$ ont même loi. En déduire que $Y$ et $1/Y$ ont même loi.