Licence 3

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 16 janvier 2017

durée 3h

****

Les calculatrices sont interdites. Comme document, une feuille A4 unique, recto-verso, est autorisée.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1

Exercice 1.

1. Soit $z = c + id$ un nombre complexe, avec $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt}\, d\lambda(t) = \frac{1}{z}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. En déduire que, pour tout réel a, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos ax}{e^x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
4. On pose, pour a un réel quelconque
$$F(a) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - \cos ax}{e^x - 1}\, d\lambda(x).$$
Soit A un réel quelconque. Montrer que F est continue sur $]-A, A[$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Soit a un réel quelconque. Étudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n^a(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \cos(ax)) e^{-(k+1)x}$.
6. Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} f_n^a(x)\, d\lambda(x)$ tend vers $F(a)$ quand n tend vers l'infini.
7. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$
$$F(a) = a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2 + a^2)}.$$

Exercice 2. On considère une demi-boule, dont l'équation dans $\mathbb{R}^3$ est

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; z \geq 0\}$$

Le centre de gravité de D est le point de coordonnées (x_G, y_G, z_G), avec

$$\begin{cases} x_G & = \frac{\int_D x \ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)}, \\ y_G & = \frac{\int_D y \ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)}, \\ z_G & = \frac{\int_D z \ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)}. \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées du centre de gravité de D

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1, T une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On suppose que T est indépendante de la tribu $\sigma(X_n, n \geq 1)$ engendrée par les X_n.

Pour $n \geq 1$, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, ainsi que

$$M = M_T = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{T=n\}} M_n.$$

On notera bien que dans la somme ci-dessus, pour tout ω seul un terme est non-nul, celui pour $n = T(\omega)$.

1. Pour $n \geq 1$, et t réel, écrire l'événement $\{M_n \leq t\}$ comme une intersection d'événements, puis déterminer la fonction de répartition de M_n.
2. Montrer que la loi M_n est une loi à densité, dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $t \mapsto ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.
3. Pour $\alpha < 1$, calculer $\mathbb{E}(e^{\alpha M_2})$.
4. Montrer que pour $t < 0$, $F_M(t) = 0$, où F_M désigne la fonction de répartition de M.
5. Pour n entier naturel non nul, et $t \geq 0$ montrer soigneusement que
$$\mathbb{P}(M \leq t, T = n) = e^{-1}\frac{(1 - e^{-t})^n}{n!}.$$
6. Soit $t \geq 0$. Écrire l'événement $\{M \leq t\}$ comme une réunion disjointe. En déduire que
$$F_M(t) = \exp(-\exp(-t)).$$
7. On pose $G = -\log X_1$. On dit que G suit la loi de Gumbel. On pose encore $Y = \max(G, 0)$. Montrer que Y et M ont même loi.

FIN

1 Solutions

Solution 1 1. Pour a, b réels, on a $|e^{a+ib}| = |e^a e^{ib}| = |e^a|.|e^{ib}| = e^a.1$ En particulier $|e^{-zt}| = e^{-ct}$, et

$$\int_{\mathbb{R}^+} |e^{-zt}|\ d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ct}\ d\lambda(t) = \frac{1}{c} < +\infty,$$

donc $z \mapsto e^{-zt}$ est intégrable. On a

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt}\ d\lambda(t) = \lim_{N\to+\infty} \int_{[0,N]} e^{-zt}\ d\lambda(t)$$

Or,

$$\int_{[0,N]} e^{-zt}\ d\lambda(t) = \int_0^N e^{-zt}\ dt = \frac{1-e^{-zN}}{z}.$$

Comme $|e^{-zN}| = e^{-cN} \to 0$ quand $N \to +\infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt}\ d\lambda(t) = \frac{1}{z}.$$

Note : rares sont ceux qui ont pensé à justifier que $\lim_{N\to+\infty} e^{-zN} = 0$.

2. — Solution 1 : La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ est clairement continue sur $]0, +\infty[$. En 0, $e^x = 1 + x + o(x)$, donc $e^x - 1 \sim x$ et $\frac{x}{e^x-1} \sim 1$: f admet un prolongement par continuité en 0 : l'intégrale est donc « faussement impropre »en 0. La fonction est donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, seul le comportement à l'infini reste à étudier. Or $\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{e^{x/2}} \frac{x}{e^{x/2}-e^{-x/2}}$. En l'infini $\frac{x}{e^{x/2}-e^{-x/2}} \sim \frac{x}{e^{x/2}}$ tend vers 0 avec les croissances comparées classiques. Ainsi $f(x) = o(e^{-x/2})$ en l'infini. Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'intégrabilité de f en l'infini, et finalement sur $\mathbb{R}_+$.
   — Solution 2 : Pour tout $x \geq 0$, on a $x \leq \sinh(x)$, et en particulier $x/2 \leq \sinh(x/2)$. Pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$. Ainsi

   $$0 \leq \frac{x}{e^x-1} \leq \frac{2\sinh(x/2)}{e^x-1} = \frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^x-1} = e^{-x/2}.$$

   Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le résultat s'ensuit.

3. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout t réel, on a $|1 - \cos t| \leq |t|$. En particulier, pour $x \geq 0$,

   $$|\frac{1-\cos ax}{e^x-1}| \leq \frac{|ax|}{e^x-1} = |a|\frac{x}{e^x-1}$$

   et l'intégrabilité découle de celle de f.

4. — Solution 1 : Fixons $A > 0$. On a

- Pour tout $x \geq 0$, $a \mapsto \frac{\sin ax}{e^x - 1}$ est continue sur $[-A, A]$.
- Pour tout $x \geq 0$, pour tout $a \in [-A, A]$, on a

$$|\frac{|1-\cos ax|}{|e^x - 1|} \leq \frac{|ax|}{|e^x - 1|} = |a|\frac{x}{e^x - 1} \leq A\frac{x}{e^x - 1} = Af(x).$$

- $\int_{\mathbb{R}_+} Af(x)\ d\lambda(x) < +\infty$ d'après la question précédente.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, F est continue sur $[-A, A]$. Comme la continuité est une propriété locale et que tout point de $\mathbb{R}$ a un voisinage de la forme $[-A, A]$, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.

- Solution 2 : Pour a, b dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}|F(a) - F(b)| &= |\int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\cos(bx) - \cos(ax))}{e^x - 1}\ d\lambda(x)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} |\frac{(\cos(bx) - \cos(ax))}{e^x - 1}|\ d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|ax - bx|}{e^x - 1}\ d\lambda(x) \\ &\leq C|a - b|,\end{aligned}$$

avec $C = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{e^x - 1}\ d\lambda(x) < +\infty$. Ceci montre que F est C-lischitzienne. En particulier, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5. Pour $x = 0$, la suite $f_n^a(x)$ est identiquement nulle. Sinon, pour $x > 0$, on reconnait la suite des sommes partielles de la série géométrique de premier terme $(1 - \cos(ax))e^{-x}$ et de raison e^{-x} avec $0 \leq e^{-x} < 1$: la limite lorsque n tend vers l'infini est

$$(1 - \cos(ax))e^{-x}\frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Dans tous les cas $f_n^a(x)$ tend vers $(1 - \cos(ax))e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}}$.

6. On a simplement

$$\begin{aligned}|f_n^a(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |(1 - \cos(ax))e^{-(k+1)}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} ||ax|e^{-(k+1)} \\ &\leq |a|\sum_{k=0}^{+\infty} xe^{-(k+1)} = |a|\frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = |a|f(x)\end{aligned}$$

Comme $|a|f$ est intégrable, on obtient par le théorème de convergence dominée que la limite des intégrales est l'intégrale de la limite, soit $F(a)$. On pouvait aussi procéder par convergence monotone, ce qu'on fait de nombreuses copies.

7. On a

$$f_n^a(x) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1-e^{iax})e^{-(k+1)x}\right) \quad = \Re\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1-ia)x}\right)\right)$$

La fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1}(e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1-ia)x})$ est intégrable comme somme de n fonctions intégrables (voir la question 1) et l'intégrale de la somme est la somme des intégrales :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1-ia} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k-ia}.$$

L'intégrale de f_n^a en est la partie réelle, soit

$$\begin{aligned}\Re\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k-ia} &= \Im\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{k+ia}{k^2+a^2}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{k}{k^2+a^2}\\ &= a^2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k^2+a^2)},\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu avec la question précédente.

Solution 2 Pour $z \in \mathbb{R}$, on note $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y,z) \in D\}$. Pour $z < 0$ ou $z > 1$, on a $D_z = \varnothing$, tandis que pour $z \in [0,1]$, on a $D_z = B(0, \sqrt{1-z^2})$, où $B(x,r)$ est, dans le plan, la boule de centre x et de rayon r.

D'après le théorème de Tonelli, on a

$$\lambda^{\otimes 3}(D) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(D_z)\, d\lambda(z)$$

Comme D_z est vide si $z \notin [0,1]$, on a simplement

$$\begin{aligned}\lambda^{\otimes 3}(D) &= \int_{[0,1]} \lambda^2(D_z)\, d\lambda(z)\\ &= \int_0^1 \pi(1-z^2)\, dz\\ &= \pi(1-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

Posons $s(x,y,z) = (-x,-y,z)$ et $v = \int_D (x,y,z)\, d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)$. Par linéarité, et comme $s(A) = A$, on a

$$\begin{aligned}
s(v) &= \int_D s(x,y,z)\ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}^3} 1\!\!1_D(x,y,z)s(x,y,z)\ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} 1\!\!1_D(s(x,y,z))s(x,y,z)\ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} 1\!\!1_D(x',y',z')(x',y',z')\ d\lambda^{\otimes 3}(x',y',z') = v
\end{aligned}$$

ce qui entraîne que le centre de gravité est sur l'axe de la symétrie s. Reste à calculer sa coordonnée sur l'axe des z, soit $\frac{1}{\lambda^{\otimes 3}(D)} \int_D z\ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)$. Comme D est borné (inclus dans une boule), $(x,y,z) \mapsto z 1\!\!1_D(x,y,z)$ est intégrable et on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_D z\ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z) &= \int_{\mathbb{R}^3} z 1\!\!1_D(x,y,z)\ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} z 1\!\!1_D(x,y,z)\ d\lambda^2(x,y) \right)\ d\lambda(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} z \left(\int_{\mathbb{R}^2} 1\!\!1_D(x,y,z)\ d\lambda^2(x,y) \right)\ d\lambda(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} z\lambda^2(D_z)\ d\lambda(z) \\
&= \int_{[0,1]} z\lambda^2(D_z)\ d\lambda(z) \\
&= \int_{[0,1]} z\pi(1-z^2)\ d\lambda(z) \\
&= \pi \int_0^1 z - z^3\ dz \\
&= \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

donc l'altitude du centre de masse est finalement $\frac{-\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$, d'où la position du centre de masse : $(0,0,\frac{3}{8})$.

Solution 3 1. On a $\{M_n \leq t\} = \underset{1 \leq i \leq n}{\cap} \{X_i \leq t\}$. L'indépendance nous donne

$$\mathbb{P}(M_n \leq t) = \underset{1 \leq i \leq n}{\cap} \mathbb{P}(X_i \leq t)$$

et puisqu'ils ont tous la même loi

$$\mathbb{P}(M_n \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n$$

Pour $t < 0$, $\mathbb{P}(X_1 \leq t) = 0$, tandis que pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1) \leq t &= \int_0^t f_{X_1}(x)\ dx \\ &= \int_0^t e^{-x}\ dx = 1 - e^{-x},\end{aligned}$$

on a donc

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} (1 - e^{-x})^n & \text{si x} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. La fonction de répartition de M_n est continue, C^1 par morceaux : elle admet donc une densité, qui est donné, sur chaque morceau, par la dérivée de la fonction de répartition sur le morceau. Cela nous donne la densité

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si x} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui est bien la densité annoncée.
Note : beaucoup de réponses avec des erreurs : la dérivabilité par morceaux n'est pas suffisante pour être la fonction de répartition d'une loi à densité, et ici, F_{M_n} n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, contrairement à ce qu'on a lu parfois.

3. Soit $\alpha < 1$. La variable $e^{\alpha M_2}$ est positive. Le théorème de transfert nous donne donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\alpha M_2}) &= \int_\Omega e^{\alpha M_2(\omega)}\ d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\mathbb{R} e^{\alpha x}\ d\mathbb{P}_{M_2}(x) \\ &= \int_\mathbb{R} e^{\alpha x} f_{M_2}(x)\ d\mathbb{P}\lambda(x) \\ &= \int_\mathbb{R} e^{\alpha x} 2e^{-x}(1 - e^{-x})\ d\lambda(x) \\ &= 2\int_\mathbb{R} e^{-(1-\alpha)x} - e^{-(2-\alpha)x})\ d\lambda(x) \\ &= 2\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha}\right) \\ &= \frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\end{aligned}$$

4. Les événements $\{T = n\}$ forment une partition de l'espace. On a donc pour tout t réel

$$\{M \leq t\} = \cup_{n \geq 0}\{T = n, M \leq t\}$$

et la réunion est disjointe. Comme $M = M_n$ sur l'événement $\{T = n\}$, on a $\{T = n, M \leq t\} = \{T = n, M_n \leq t\}$. Or pour $t < 0$, l'événement $\{M_n \leq t\}$ est de probabilité nulle, a fortiori $\{T = n, M_n \leq t\}$ l'est aussi, et l'événement $\{M \leq t\}$ est de probabilité nulle car c'est une réunion dénombrable d'événements de probabilité nulle.

5. Pour n entier naturel non nul, et $t \geq 0$, on a déjà vu que $\{T = n, M \leq t\} = \{T = n, M_n \leq t\}$, donc $\mathbb{P}(T = n, M \leq t) = \mathbb{P}(T = n, M_n \leq t)$. D'après l'hypothèse d'indépendance, on a donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = n, M \leq t) &= \mathbb{P}(T = n)\mathbb{P}(M_n \leq t)\\ &= e^{-1}\frac{1^n}{n!}(1 - e^{-t})^n = e^{-1}\frac{(1 - e^{-t})^n}{n!},\end{aligned}$$
en utilisant le résultat de la question 1.
Note : nombreux sont ceux qui ont écrit
$$\mathbb{P}(M \leq t, T = n) = \mathbb{P}(T = n)\mathbb{P}(M \leq t|T = n),$$
ce qui est vrai, puis écrivent alors sans justification que
$$\mathbb{P}(M \leq t|T = n) = \mathbb{P}(M_n \leq t),$$
ce qui est vrai aussi, mais mériterait une explication sérieuse.

6. Comme on l'a déjà noté, $\{M \leq t\}$ est la réunion réunion disjointe des événements $\{T = n, M \leq t\} = \{T = n, M_n \leq t\}$, donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \leq t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n, M \leq t)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-1}\frac{(1 - e^{-t})^n}{n!}\\ &= \exp(-1 + (1 - e^{-t})) = \exp(-e^{-t})\end{aligned}$$

7. $Y = \max(0, G) \geq 0$ donc pour $t < 0$, $P(Y \leq t) = 0$. Pour $t \geq 0$, on a
$$\begin{aligned}\{Y \leq t\} &= \{\max(0, G) \leq t\} = \{0 \leq t\} \cap \{G \leq t\} = \{G \leq t\}\\ &= \{-\log X_1 \leq t\} = \{X_1 \geq e^{-t}\}\end{aligned}$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq t) &= \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-t})\\ &= \mathbb{P}_{X_1}([e^{-t}, +\infty[)\\ &= \int_{[e^{-t}, +\infty[} e^{-x}\ d\lambda(x)\\ &= \exp(-e^{-t})\end{aligned}$$
Ainsi, pout tout t réel, $F_Y(t) = F_M(t)$: Y et M ont la même fonction de répartition. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, elles ont la même loi.