Licence 3

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 11 janvier 2016

durée 3h

****

Les calculatrices et les documents sont interdits.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1. On note Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

I

1. Vérifier que Γ est bien définie.
2. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec

$$\forall x > 0 \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \; t^{x-1}\, dt.$$

Indication : commencer par prendre $x \in]a,b[$, avec $0 < a < b < +\infty$.

II

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = H_n - \log n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite.
   Indication : on pourra étudier la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\ dv$. À cet effet, on pourra calculer la somme
$$1 + (1-v) + \cdots + (1-v)^{n-1}.$$
3. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = -\int_0^1 \log v\ (1-v)^n dv.$$
4. Établir que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t}$.
5. On pose $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \log t\ dt$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t\ dt.$$
   Indication : écrire I_n sous la forme $I_n = \int_{]0,+\infty[} f_n(t)\ d\lambda(t)$, avec f_n bien choisie.
6. Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.
   Indication : on pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}(\log n - H_{n+1})$

Exercice 2. *Nombres de Bell et loi de Poisson*
On rappelle que pour $\lambda > 0$, la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, est la mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\mathcal{P}(\lambda)(k) = \mathcal{P}(\lambda)(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

1. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel vit une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $A > 0$ et n entier naturel avec
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |f(k)| \leq A(1 + |k|^n).$$
   (a) Montrer que la variable aléatoire $Xf(X)$ est intégrable et montrer que
$$\mathbb{E}(Xf(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} kf(k)\mathcal{P}(\lambda)(k).$$

(b) On pose $Y = X + 1$. Montrer que pour tout entier naturel k, on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{k}{\lambda}\mathbb{P}(X = k).$$

(c) On note μ_λ la mesure image de $\mathcal{P}(\lambda)$ par l'application $x \mapsto x + 1$. μ_λ admet-elle une densité par rapport à $\mathcal{P}(\lambda)$, si oui, laquelle ? *Note : il n'est pas nécessaire d'avoir résolu cette question pour traiter la suite*

(d) Montrer que $\mathbb{E}(Xf(X)) = \lambda\mathbb{E}(f(X + 1))$.

2. À partir de maintenant, on suppose que $\lambda = 1$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}(X^n)$. En utilisant ce qui précède, démontrer la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k.$$

3. Si A est un ensemble fini non vide, on note $\overline{B}(A)$ l'ensemble des partitions de A en une famille d'ensembles non-vides. Par exemple, les partitions de $\{1, 2, 3\}$ sous forme d'ensembles non-vides sont

$$P_1 = \{\{1, 2, 3\}\},$$
$$P_2 = \{\{1\}; \{2; 3\}\}, \quad P_3 = \{\{2\}; \{1; 3\}\}, \quad P_4 = \{\{3\}; \{1; 2\}\}$$
$$P_5 = \{\{1\}; \{2\}; \{3\}\}$$

On pose également par convention $\overline{B}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. On admettra que le cardinal de $\overline{B}(A)$ ne dépend que de celui de A, et on pose alors $B_n = |\overline{B}(\{1, \ldots, n\})|$. B_n est le n-ième nombre de Bell.

Soit ϕ l'application de $\overline{B}(\{1, \ldots, n + 1\})$ dans $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ qui a $P \in \overline{B}(\{1, \ldots, n + 1\})$ associe $\tilde{P}\backslash\{n + 1\}$, où $\tilde{P}$ est l'élément de la partition P contenant $n + 1$. Ainsi, lorsque $n = 2$, on a $\phi(P_2) = \{2\}$.

(a) Que valent B_0, B_3 ? Si vous ne réussissez pas à répondre à cette question, je vous suggère d'admettre la formule de récurrence d'Aitken démontrée infra et de passer à la suite.

(b) Lorsque $n = 2$, calculer $\phi(P_1)$,$\phi(P_2)$,$\phi(P_3)$,$\phi(P_4)$,$\phi(P_5)$.

(c) Dans le cas général, montrer que pour tout $A \subset \{1, \ldots, n\}$, $\phi^{-1}(A)$ est en bijection avec $\overline{B}(\{1, \ldots, n\}\backslash A)$.

(d) Établir la formule de récurrence d'Aitken :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

4. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $B_n = \mathbb{E}(X^n)$.
5. Montrer enfin la formule de Dobiński :

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

6. Pour les cœurs vaillants : on pose, pour $x > 0$ $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$. Montrer que

$$\forall x > 0 \quad E(x) = \exp(\exp(x) - 1).$$

FIN

1 Solutions

Solution 1 1. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrale sur $]0, +\infty[$. Reste à étudier l'intégrabilité en 0 et en l'infini. En 0, $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$, et comme $x-1 > -1$ et que t^{x-1} est de signe constant au voisinage de 0, l'intégrabilité en 0 découle du critère d'équivalence avec une intégrale "de type Riemann" classique. En l'infini, $e^{-t}t^{x-1} = o(e^{-t/2})$, ce qui donne la convergence en l'infini.

2. Soient a, b réels avec $0 < a < b < +\infty$. Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t}t^{x-1}\right) = \log t e^{-t}t^{x-1}.$$

Comme pour tout $t > 0$ et tout $x \in]a, b[$, on a

$$\begin{aligned}
|\log t e^{-t}t^{x-1}| &= (-\log t)e^{-t}t^{x-1}1\!\!1_{]0,1[}(t) + \log t e^{-t}t^{x-1}1\!\!1_{[1,+\infty[}(t) \\
&= (-\log t)e^{-t}t^{x-1}1\!\!1_{]0,1[}(t) + \log t e^{-t}t^{x-1}1\!\!1_{[1,+\infty[}(t) \\
&\le (-\log t)e^{-t}t^{a-1}1\!\!1_{]0,1[}(t) + \log t e^{-t}t^{b-1}1\!\!1_{[1,+\infty[}(t),
\end{aligned}$$

on pourra appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme dès qu'il sera acquis que $t \mapsto (-\log t)e^{-t}t^{a-1}1\!\!1_{]0,1[}(t) + \log t e^{-t}t^{b-1}1\!\!1_{[1,+\infty[}(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

La fonction est continue, donc localement intégrable. En 0, on a $\log t = o(t^{-a/2})$ et $e^{-t} \sim 1$, d'où $(-\log t)e^{-t}t^{a-1} = o(t^{a/2-1})$, ce qui donne l'intégrabilité en 0. En $+\infty$, comme $\log t = o(t)$, on a $\log t e^{-t}t^{b-1} = o(e^{-t}t^b)$, mais $t^b = o(e^{t/2})$, donc finalement $\log t e^{-t}t^{b-1} = o(e^{-t/2})$, ce qui donne l'intégrabilité en l'infini.

Ainsi, la fonction Γ est dérivable sur $]a,b[$, avec

$$\forall x \in]a,b[\quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \; t^{x-1} \, d\lambda(t).$$

Mais comme la dérivabilité est une propriété locale et que tout point de $]0,+\infty[$ admet un voisinage de la forme $]a,b[$, avec a, b réels vérifiant $0 < a < b < +\infty$, le résultat s'ensuit.

II

1.

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1)) \\ &= \frac{1}{n} + \log(1 - 1/n) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \\ &= O(\frac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais $\sum_{k=2}^n (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

2. Pour tout $v \in]0,1[$, on a

$$1 + (1-v) + \cdots + (1-v)^{n-1} = \frac{1-(1-v)^n}{1-(1-v)} = \frac{1-(1-v)^n}{v}.$$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-v)^k \; dv = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} \; dv.$$

Or $\int_0^1 (1-v)^k \; dv = \int_0^1 v^k \; dv = \frac{1}{k+1}$, d'où

$$\int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} \; dv = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n.$$

3. On fait une intégration par parties : pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \log v \; (1-v)^n dv &= [\log v \frac{1-(1-v)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v} \; dv \\ &= -\log \varepsilon \frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v} \; dv \end{aligned}$$

Cependant, on a l'équivalent en 0 : $-\log\varepsilon\frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{n+1}\sim-\varepsilon\log\varepsilon$, d'où en faisant tendre ε vers 0 :

$$\int_0^1 \log v\ (1-v)^n dv = -\frac{1}{n+1}\int_1^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v}\ dv = -\frac{H_{n+1}}{n+1}$$

grâce à la question précédente.

4. On pose $f(t)=1-t-e^{-t}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(t)=-1+e^{-t}$. Ainsi f' est négative sur $\mathbb{R}_+$, et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, avec pour tout $t\geq 0$, $f(t)\leq f(0)=0$, d'où l'inégalité voulue.

5. Posons, pour $t>0$ et $n\geq 1$, $f_n(t)=(1-\frac{t}{n})^n\log t\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$. Comme f_n est de signe constant, continue par morceaux, on a

$$\int_{]0,+\infty[} f_n(x)\ d\lambda(x) = \int_{]0,n]} f_n(x)\ d\lambda(x) = \int_0^n f_n(t)\ dt = I_n.$$

Pour $n\geq t$, on a $f_n(t)=(1-\frac{t}{n})^n\log t$.
Mais $(1-\frac{t}{n})^n=\exp(\log(1-\frac{t}{n})^n)=\exp(n\log(1-t/n))$: lorsque n tend vers l'infini $\log(1-t/n)\sim -t/n$, d'où $n\log(1-t/n)\sim -t$: ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\log(1-t/n)=-t/n$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-t/n)^n=e^{-t}$.

Finalement, pour tout $t>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)=e^{-t}\log t$.

On a pour t entre 0 et n

$$0\leq(1-\frac{t}{n})^n(-\log t)\leq(e^{-t/n})^n(-\log t)=(-\log t)e^{-t},$$

d'où $0\leq -f_n(t)\leq(-\log t)e^{-t}$. La dernière inégalité est encore vérifiée pour $t>n$: les termes sont tous nuls. Ainsi, on a sur $]0,+\infty[$ l'inégalité $0\leq -f_n(t)\leq(-\log t)e^{-t}$: comme, on l'a vu au I, cette fonction est intégrable, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\log t\ dt.$$

6. Un simple changement de variable affine donne

$$\begin{aligned}
\int_0^n f_n(t)\ dt &= n\int_0^1 f_n(ny)\ dy = n\int_0^1 \log(ny)(1-y)^n\ dy.\\
&= n\log n\int_0^1 (1-y)^n\ dy + n\int_0^1 \log y(1-y)^n\ dy.\\
&= \frac{n\log n}{n+1} - n\frac{H_{n+1}}{n+1},
\end{aligned}$$

soit $I_n = \frac{n}{n+1}(\log n - H_{n+1}) = \frac{n}{n+1}(\log n - H_n - \frac{1}{n+1})$ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n - \log n = \gamma$, cela nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -\gamma$. Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\log t\ dt$, qui d'après le I, est égal à $\Gamma'(1)$: on obtient donc l'identité $\gamma = -\Gamma'(1)$.

Solution 2 1. (a) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|Xf(X)|) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |kf(k)|\mathbb{P}(X=k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} Ak(1+k^n)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

On a les majorations grossières :

$$k(1+k^n) \leq 2k^{n+1} \leq 2(n+1)!e^k,$$

d'où

$$\mathbb{E}(|Xf(X)|) \leq 2A(n+1)!e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e)^k}{k!} = 2A(n+1)!e^{-\lambda+\lambda e} < +\infty.$$

Ainsi $Xf(X)$ est bien intégrable, et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Xf(X)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kf(k)\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} kf(k)\mathcal{P}(\lambda)(k).\end{aligned}$$

(b) On a $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X+1=k) = \mathbb{P}(X=k-1)$. Si $k=0$, cette probabilité est nulle et coïncide avec $\frac{k}{\lambda}\mathbb{P}(X=k)$. Sinon

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=k-1) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k k}{k\lambda(k-1)!} = \frac{k}{\lambda}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \frac{k}{\lambda}\mathbb{P}(X=k)\end{aligned}$$

(c) Posons $s(x) = x + 1$ Pour A borélien, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_Y(A) &= \mathbb{P}(Y^{-1}(A)) = \mathbb{P}((s \circ X)^{-1}(A)) \\ &= \mathbb{P}(X^{-1}(s^{-1}(A))) = \mathbb{P}_X(s^{-1}(A)) \\ &= \mathcal{P}(\lambda)(s^{-1}(A)),\end{aligned}$$

ce qui montre que la loi de Y est la loi image de $\mathcal{P}(\lambda)$ par s, soit μ_λ. Ainsi, la question précédente donne

$$\mu_\lambda(\{k\}) = \frac{k}{\lambda}\mathcal{P}(\lambda)(\{k\}).$$

Ainsi μ_λ coïncide sur les entiers avec la mesure donc la densité par rapport à $\mathcal{P}(\lambda)$ est $k \mapsto \frac{k}{\lambda}$. Comme une loi sur $\mathbb{N}$ est caractérisée par les masses des entiers, on en déduit que μ_λ est la mesure donc la densité par rapport à $\mathcal{P}(\lambda)$ est $k \mapsto \frac{k}{\lambda}$.

(d) Avec le théorème de transfert et le théorème d'intégration par rapport à une mesure à densité, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(P(X+1)) &= \int P(x+1)\ d\mathcal{P}(\lambda)(x) \\ &= \int P(x)\ d\mu_\lambda(x) \\ &= \int P(x)\frac{x}{\lambda}\ d\mathcal{P}(\lambda)(x) \\ &= \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(XP(X))\end{aligned}$$

2. La fonction $f(x) = x^n$ vérifie à l'évidence les hypothèses de la première question. On a donc

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \mathbb{E}(X^{n+1}) = \mathbb{E}(Xf(X)) \\ &= \mathbb{E}(f(X+1)) = \mathbb{E}((X+1)^n \\ &= \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbb{E}(X^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k\end{aligned}$$

3. (a) $B_0 = |\overline{B}(\varnothing)| = |\{\varnothing\}| = 1$ et $B_0 = |\overline{B}(\{1,2,3\}| = |\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}| = 5$.
   (b) — $\phi(P_1) = \{1,2,3\}\backslash\{3\} = \{1,2\}$
   — $\phi(P_2) = \{2,3\}\backslash\{3\} = \{2\}$
   — $\phi(P_3) = \{1,3\}\backslash\{3\} = \{1\}$
   — $\phi(P_4) = \{3\}\backslash\{3\} = \varnothing$
   — $\phi(P_5) = \{3\}\backslash\{3\} = \varnothing$
   (c) Soit $A \subset \{1,\dots,n\}$. $\phi^{-1}(A)$ est formé des partitions de $\{1,\dots,n+1\}$ dont un élément est $A\cup\{n+1\}$. Or une partition de $\{1,\dots,n+1\}$ contenant $A \cup \{n+1\}$ s'écrit de manière unique comme la réunion de $\{A\cup\{n+1\}\}$ et d'une partition de $\{1,\dots,n+1\}\backslash(A\cup\{n+1\}) = \{1,\dots,n\}\backslash A$, ce qui montre bien que $\phi^{-1}(A)$ est en bijection avec $\overline{B}(\{1,\dots,n\}\backslash A)$.
   (d) L'application ϕ, qui va $\overline{B}(\{1,\dots,n+1\}$ dans $\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ induit une partition de $\overline{B}(\{1,\dots,n+1\}$ par les ensembles $(\phi^{-1}(A))_{A\subset\{1,\dots,n\}}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= |\overline{B}(\{1,\dots,n+1\}| \\
&= \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} |\phi^{-1}(A)| \\
&= \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} |\overline{B}(\{1,\dots,n\}\backslash A)| \\
&= \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} B_{n-|A|} \\
&= \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} \left(\sum_{k=0}^{n} 1\!\!1_{\{|A|=k\}} B_{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} B_{n-k} \Big(\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} 1\!\!1_{\{|A|=k\}}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} B_{n-k} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k
\end{aligned}$$

4. Notons (H_n) l'hypothèse $B_n = \mathbb{E}(X^n)$. Elle est acquise pour $n = 0$ car $B_0 = 1 = \mathbb{E}(X^0)$. Vues les résultats des questions 2. et 3.d, $(H_0, \dots H_n)$ entraînent H_{n+1}, ce qui permet de conclure par récurrence.

5. On sait que X suit une loi de Poisson de paramètre 1. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de transfert : on a

$$\begin{aligned} B_n &= \mathbb{E}(X^n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^n \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^n e^{-1} \frac{1^k}{k!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \end{aligned}$$

6. Soit $x \geq 0$. Avec le théorème de Tonelli, on a

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{1}{n!} x^n \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} \\ &= \frac{1}{e} \exp(e^x) = \exp(\exp(x) - 1), \end{aligned}$$