Licence 3

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 11 janvier 2016

durée 3h

****

Les calculatrices et les documents sont interdits.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1. On note Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

I

1. Vérifier que Γ est bien définie.
2. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec

$$\forall x > 0 \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \; t^{x-1}\, dt.$$

   Indication : commencer par prendre $x \in]a,b[$, avec $0 < a < b < +\infty$.

II

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = H_n - \log n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite.
   Indication : on pourra étudier la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\ dv$. À cet effet, on pourra calculer la somme
$$1 + (1-v) + \cdots + (1-v)^{n-1}.$$
3. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = -\int_0^1 \log v\ (1-v)^n dv.$$
4. Établir que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t}$.
5. On pose $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \log t\ dt$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t\ dt.$$
   Indication : écrire I_n sous la forme $I_n = \int_{]0,+\infty[} f_n(t)\ d\lambda(t)$, avec f_n bien choisie.
6. Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.
   Indication : on pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}(\log n - H_{n+1})$

Exercice 2. *Nombres de Bell et loi de Poisson*
On rappelle que pour $\lambda > 0$, la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, est la mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\mathcal{P}(\lambda)(k) = \mathcal{P}(\lambda)(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

1. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel vit une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $A > 0$ et n entier naturel avec
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |f(k)| \leq A(1 + |k|^n).$$
   (a) Montrer que la variable aléatoire $Xf(X)$ est intégrable et montrer que
$$\mathbb{E}(Xf(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} kf(k)\mathcal{P}(\lambda)(k).$$

(b) On pose $Y = X+1$. Montrer que pour tout entier naturel k, on a

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{k}{\lambda}\mathbb{P}(X=k).$$

(c) On note μ_λ la mesure image de $\mathcal{P}(\lambda)$ par l'application $x \mapsto x+1$. μ_λ admet-elle une densité par rapport à $\mathcal{P}(\lambda)$, si oui, laquelle ?
Note : il n'est pas nécessaire d'avoir résolu cette question pour traiter la suite

(d) Montrer que $\mathbb{E}(Xf(X)) = \lambda\mathbb{E}(f(X+1))$.

2. À partir de maintenant, on suppose que $\lambda = 1$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}(X^n)$. En utilisant ce qui précède, démontrer la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k.$$

3. Si A est un ensemble fini non vide, on note $\overline{B}(A)$ l'ensemble des partitions de A en une famille d'ensembles non-vides. Par exemple, les partitions de $\{1,2,3\}$ sous forme d'ensembles non-vides sont

$$P_1 = \{\{1,2,3\}\},$$
$$P_2 = \{\{1\};\{2;3\}\}, \quad P_3 = \{\{2\};\{1;3\}\}, \quad P_4 = \{\{3\};\{1;2\}\}$$
$$P_5 = \{\{1\};\{2\};\{3\}\}$$

On pose également par convention $\overline{B}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. On admettra que le cardinal de $\overline{B}(A)$ ne dépend que de celui de A, et on pose alors $B_n = |\overline{B}(\{1,\dots,n\})|$. B_n est le n-ième nombre de Bell.
Soit ϕ l'application de $\overline{B}(\{1,\dots,n+1\})$ dans $\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ qui a $P \in \overline{B}(\{1,\dots,n+1\})$ associe $\tilde{P}\backslash\{n+1\}$, où $\tilde{P}$ est l'élément de la partition P contenant $n+1$. Ainsi, lorsque $n=2$, on a $\phi(P_2) = \{2\}$.

(a) Que valent B_0, B_3 ? Si vous ne réussissez pas à répondre à cette question, je vous suggère d'admettre la formule de récurrence d'Aitken démontrée infra et de passer à la suite.

(b) Lorsque $n=2$, calculer $\phi(P_1)$,$\phi(P_2)$,$\phi(P_3)$,$\phi(P_4)$,$\phi(P_5)$.

(c) Dans le cas général, montrer que pour tout $A \subset \{1,\dots,n\}$, $\phi^{-1}(A)$ est en bijection avec $\overline{B}(\{1,\dots,n\}\backslash A)$.

(d) Établir la formule de récurrence d'Aitken :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

4. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $B_n = \mathbb{E}(X^n)$.
5. Montrer enfin la formule de Dobiński :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

6. Pour les cœurs vaillants : on pose, pour $x > 0$ $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$. Montrer que

$$\forall x > 0 \quad E(x) = \exp(\exp(x) - 1).$$

FIN