Intégration et probabilités
Examen final du 13/01/2013 (durée 3h)

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Aucun document n'est autorisé. Une attention particulière sera portée dans la notation à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $\lambda > 0$ fixé. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de densité

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = C \exp(-\lambda x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Déterminer C en fonction de λ pour que f soit effectivement une densité.
2. Soit $\mu > 0$. À quelle condition sur μ la variable aléatoire $X_\mu = \exp(\mu X)$ est-elle intégrable ? Sous cette condition, calculer l'espérance de X_μ.
3. Calculer la fonction de répartition F_X de X.
4. On pose $Y = \sqrt{X}$. Montrer que Y admet une densité et la calculer.

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Énoncer l'inégalité de Hölder.
2. Soit f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$; on suppose de plus qu'elles sont dans $\mathcal{L}^3(E, \mathcal{F}, \mu)$. Montrer que fg^2 est dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{F}, \mu)$.

Exercice 3. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\exp(-tx)}{1 + x^2} d\lambda(x).$$

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto \dfrac{\exp(-tx)}{1 + x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
4. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et donner une expression de sa dérivée.
5. (Hors-barême) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 satisfaite par f. On ne demande pas de la résoudre.

Exercice 4.

1. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que $y \mapsto \sin(y) \exp(-xy)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Soit $M > 0$. Montrer que
   $$\int_{\mathbb{R}_+} \sin(y) \exp(-xy) d\lambda(y) = \frac{1}{1 + x^2}.$$
   On pourra se placer sur un compact $[0, M]$, puis faire des intégrations par parties ou introduire l'intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2. On rappelle que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)dx = \frac{1}{2}.$$
En déduire que pour tout $a > 0$,
$$\int_0^{+\infty} u^2 \exp(-au^2)du = \frac{C}{a^{3/2}},$$
où C est une constante que l'on déterminera.
3. On considère toujours l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $y > 0$ fixé. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x} \exp(-xy)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) À l'aide d'un changement de variable et de la question 2, montrer que
$$\int_{\mathbb{R}_+} \sqrt{x} \exp(-xy) d\lambda(x) = \frac{C'}{y^{3/2}},$$
   où C' est une constante que l'on déterminera.
4. On pose, pour tous $x, y > 0$,
$$f(x, y) = \sqrt{x} \sin(y) \exp(-xy).$$
   (a) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} dx = C' \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y^{3/2}} dy.$$
   (c) (Hors-barême) Calculer la valeur de ces intégrales.