Intégration et probabilités
Examen final du 15/01/2013 (durée 3h)

Le sujet est long : le barème sera sur 30 points.

Exercice 1. Sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère la mesure de Lebesgue notée λ. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad I(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2(1+t^2))d\lambda(x).$$

1. Vérifier que I est bien définie.
2. Montrer que I est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que I est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2. Soit $b > a > 0$ deux nombres réels fixés. Sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, on considère la mesure de Lebesgue notée $\lambda^{(2)}$. On introduit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \exp(-xy)\mathbf{1}_{\{x>0\}}\mathbf{1}_{\{a<y<b\}}.$$

1. Montrer que f est mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que f est intégrable par rapport à $\lambda^{(2)}$.
3. Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Exercice 3. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

1. Montrer que f est une densité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Calculer la fonction de répartition F_X de X.
3. On note $Y = 1/X$. Exprimer la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de F_X. En déduire que Y admet une densité que l'on déterminera.

Problème. Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sur lequel on considère la mesure de Lebesgue notée λ. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note

$$\|f\|_\infty = \sup\{M > 0 : \ \mu(\{f \geq M\} > 0\}.$$

I. **Un exemple.** On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,1], \\ \frac{1}{x^2} & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Justifier le fait que f est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2. Déterminer $\|f\|_\infty$.
3. Montrer que f est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Calculer explicitement $\|f\|_p$ en fonction de p.
4. Vérifier que $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

II. **Cas général.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable, intégrable et telle que $\|f\|_\infty < +\infty$. Le but est de montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

1. La fonction $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1$ pour tout x dans E est-elle toujours intégrable ?
2. Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour f.
3. Montrer que f est dans $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{F}, \mu)$ pour tout $p \in]1, +\infty[$.
   On pourra considérer $M > \|f\|_\infty$ et montrer que pour μ presque tout x,
   $$f(x)^p \leq f(x)\mathbf{1}_{\{f\leq 1\}} + M^p\mathbf{1}_{\{f>1\}}.$$
4. Montrer que pour tout $M > \|f\|_\infty$, $\|f\|_p \leq M^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_1^{\frac{1}{p}}$.
5. On suppose que $\mu(\{f > 0\}) > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\mu(\{f > m\}) > 0$.
   (b) Soit $m > 0$ tel que $\mu(\{f > m\}) > 0$. Montrer que $\|f\|_p \geq m\mu(\{f \geq m\})^{\frac{1}{p}}$.
6. Conclure.

Fin du sujet