Université de Lorraine **Licence 3**

Intégration et Probabilités

corrigé de l'examen du 10 janvier 2012

Problème 1

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. Observons le comportement lorsque t tend vers 0. On a
$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = \frac{(1-e^{-t})e^{-t} - te^{-xt}}{t(1-e^{-t})}.$$
En 0, on a $1 - e^{-t} \sim t$, d'où $t(1 - e^{-t}) \sim t^2$. Pour le numérateur,
$$\begin{aligned} e^{-t} - e^{-2t} - te^{-xt} &= (1 - t + O(t^2)) - (1 - 2t + O(t^2)) - t(1 + O(t)) \\ &= (t + O(t^2)) - (t + O(t^2)) \\ &= O(t^2). \end{aligned}$$
Finalement $\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = O(1)$ au voisinage de 0 ce qui donne l'intégrabilité sur $]0, \max(1, x)]$. Pour $t \in [\max(1, x), +\infty[$, on a
$$|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}| \leq \frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \leq e^{-t} + \frac{1}{1-e^{-x}}e^{-xt},$$
ce qui donne l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$. L'intégrabilité d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ entraîne la convergence de l'intégrale de Riemann impropre correspondante, donc $\psi(x)$ est bien défini.
2. Soient a, b avec $0 < a < b < +\infty$. Si $x \in [a, b]$, on a pour tout $t > 0$
$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}} \leq \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \leq \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}},$$

d'où

$$|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}| \leq |\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}}| + |\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}}|.$$

Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $[a, b]$. Comme $|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}}| + |\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}}|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, on en déduit la continuité de ψ sur $[a, b]$. En particulier, pour tout $x > 0$, ψ est continue sur $[x/2, 2x]$ qui est un voisinage de x : ψ est donc bien continue sur $]0, +\infty[$ tout entier.

3.

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1)) \\ &= \frac{1}{n} + \log(1 - 1/n) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \\ &= O(\frac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais $\sum_{k=2}^{n}(u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

4. Pour tout $t > 0$, on a

$$e^{-t} + e^{-2t} + \cdots + e^{-nt} = \frac{e^{-t}(1 - e^{-nt})}{1 - e^{-t}} = \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}.$$

En intégrant entre 0 et $+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} e^{-kt} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}.$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-kt} = \frac{1}{k}$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} = H_n.$$

5. À u fixé, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. En outre, $\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} = u - 1$, donc la fonction se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale est "faussement impropre" en 0. En l'infini, on a $\frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} = O(e^{-(\min(1,u)t})$,

d'où la convergence de l'intégrale. Par ailleurs $\frac{\partial}{\partial u}\frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t} = e^{-ut}$, ce qui nous donne pour tout $a > 0$

$$\forall u \in [a, +\infty[\quad \forall t > 0 \quad |\frac{\partial}{\partial u}\frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t}| = e^{-ut} \leq e^{-at}.$$

Or $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable, indépendante de u donc $u \mapsto F(u)$ est C^1 sur $]a, +\infty[$, avec $F'(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ut}\, dt = \frac{1}{u}$. Comme a est quelconque strictement positif, le résultat est bien C^1 sur $]0, +\infty[$ tout entier avec $F'(u) = \frac{1}{u}$. Ainsi pour $x > 0$, $F(x) = F(1) + \int_1^x F'(u)\, du = 0 + \int_1^x \frac{du}{u} = \log x$.

6. Il est facile de voir que pour tout $n \geq 1$, on a

$$|e^{-nt}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)| \leq e^{-t}\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right|.$$

Comme pour tout $t > 0$, $\lim_{n\to+\infty} e^{-nt}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)$, si l'on montre que $e^{-t}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)$ est intégrable, le théorème de convergence dominée permettra de conclure que la limite de J_n. Or nous avons déjà démontré que $e^{-t}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)$ est intégrable : c'est la fonction dont l'intégrale définit la valeur de $\psi(1)$.

7. On a

$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-nt}}{t} + \frac{e^{-nt}}{t} - \frac{e^{-nt}}{1-e^{-t}} + \frac{e^{-nt}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}},$$

D'où en intégrant entre 0 et $+\infty$, $\psi(1) = F(n) + J_n - H_{n-1}$, où on a utilisé la question 4 pour la dernière identité. Avec la question 5. , on a $\psi(1) = \log n + J_n - H_{n-1}$.

8. $\log(n-1) = \log n + \log(1 - 1/n)$, donc $\psi(1) = \log(1-1/n) + J_n - (H_{n-1} - \log(n-1))$. Lorsque n tend vers l'infini, $\log(1-1/n)$ tend vers 0, J_n vers 0, et $H_{n-1} - \log(n-1)$ vers γ, d'où $\psi(1) = -\gamma$.

Problème II

1. Comme la fonction $x \mapsto e^{\mu x}$ est positive, on a avec le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{\mu X_1}] &= \int e^{\mu X_1}\ d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\mu x}\ d\mathbb{P}_{X_1}(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\mu x} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda e^{-\lambda x}\ d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-(\lambda-\mu)x}\ d\lambda(x) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda-\mu} < +\infty.
\end{aligned}$$

2. (a) S_n est clairement mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$. D'après le théorème d'associativité de l'indépendance, cette tribu est indépendante de la tribu engendrée par X_{n+1}, donc les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

   (b) Comme $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(n, \lambda)$, pour tout n X_n suit la loi $\Gamma(1, \lambda)$. On sait que si deux variables aléatoires indépendantes X et Y vérifient $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(a, \lambda)$, alors $X+Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$. En utilisant le résultat de la question précédente, il vient alors aisément par récurrence sur n que pour tout entier n strictement positif, la variable aléatoire S_n suit une loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$.

   (c) Remarquons d'abord que comme les X_n sont positifs, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Si $S_{n+1} \leq t$, alors $n+1 \in \{k \geq 0; S_k \leq t\}$, donc $N_t \geq n+1$, donc bien sûr $N_t > n$. Inversement, si $S_{n+1} > t$, alors $\{k \geq 0; S_k \leq t\} \subset \{0, \ldots, n\}$, donc sa borne supérieure N_t est inférieure ou égale à n. Ainsi $(N_t > n) \iff (S_{n+1} \leq t)$, ce qui signifie que $\{N_t > n\} = \{S_{n+1} \leq t\}$.

   (d) Comme S_n suit la loi $\Gamma(n, \lambda)$, S_n admet la densité $x \mapsto \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \leq t) &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}\ dx \\
&= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(n)} (\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}\ \lambda dx \\
&= \int_0^{\lambda t} \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x}\ dx \\
&= g_n(\lambda t)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(t) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^t x^n e^{-x}\ dx \\
&= \big[\frac{1}{\Gamma(n+1)} x^n (-e^{-x})\big)_0^t + \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^t n x^{n-1} e^{-x} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)} t^n e^{-t} + \frac{1}{n\Gamma(n)} \int_0^t n x^{n-1} e^{-x} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)} e^{-t} t^n + g_n(t)
\end{aligned}$$

(f) Comme N_t est à valeurs entières, $\{N_t > n-1\} = \{N_t = n\} \cup \{N_t > n\}$, d'où $\mathbb{P}(N_t > n-1) = \mathbb{P}(N_t = n) + \mathbb{P}(N_t > n)$, ou encore $\mathbb{P}(S_n \leq t) = \mathbb{P}(N_t = n) + \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$, d'où $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$.

(g) Soit $t > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) \\
&= g_n(\lambda t) - g_{n+1}(\lambda t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)} e^{\lambda t} (\lambda t)^n \\
&= \frac{1}{n!} e^{\lambda t} (\lambda t)^n,
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. $\{Y \leq t\} = -\frac{\ln U}{\lambda} \leq t\} = \{U \geq e^{-\lambda t}\}$. Si $t < 0$, $e^{-\lambda t} > 1$, donc $\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(U \geq e^{-\lambda t}) = 0$. Sinon $\mathbb{P}(Y \leq t) =$

$\mathbb{P}(U \in [e^{-\lambda t}, 1]) = 1 - e^{-\lambda t} = \int_0^t e^{-x}\, dx$. Dans les deux cas,

$$\mathbb{P}(Y \le t) = \int_{]-\infty, t]} e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, d\lambda(x),$$

ce qui montre bien que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

(b) Ce programme génère un exemplaire de la loi de Poisson de paramètre λ.

4. (a) Les $(X_n)_{n \ge 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 1, donc d'après la loi forte des grands nombres S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}X_1$. Comme X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ, on a $\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{\lambda}$.

(b) D'après la question précédente est le résultat d'analyse admis, il est immédiat que $\frac{N_t}{t}$ converge presque sûrement vers $1/(1/\lambda) = \lambda$.

FIN