Licence 3

Intégration et Probabilités

Examen du 10 janvier 2012

durée 3h

Les calculatrices sont interdites. Comme unique document, un recto-verso au format A4 est autorisé

*** Problème I ***

On note ψ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par la relation

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right) dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

I

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,+\infty[$. En déduire que ψ est bien définie.
2. Soient a, b des réels avec $0 < a < b$. Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $x \in]a,b[$, on a
$$\left| \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right| \leq \left| \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}} \right| + \left| \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}} \right|.$$
Montrer que ψ est continue sur $]a,b[$, puis que ψ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = H_n - \log n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite.
Indication : on pourra étudier la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}\, dt.$$
Indication : on pourra calculer la somme $e^{-t} + e^{-2t} + \cdots + e^{-nt}$.

5. Pour $u > 0$, on pose
$$F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t}\, dt.$$
Vérifier que F est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'elle est dérivable. En déduire la valeur de F.
6. On pose
$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$
Déterminer la limite de J_n quand n tend vers l'infini.
7. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\psi(1) = \log n + J_n - H_{n-1}$.
8. En déduire que $\gamma = -\psi(1)$.

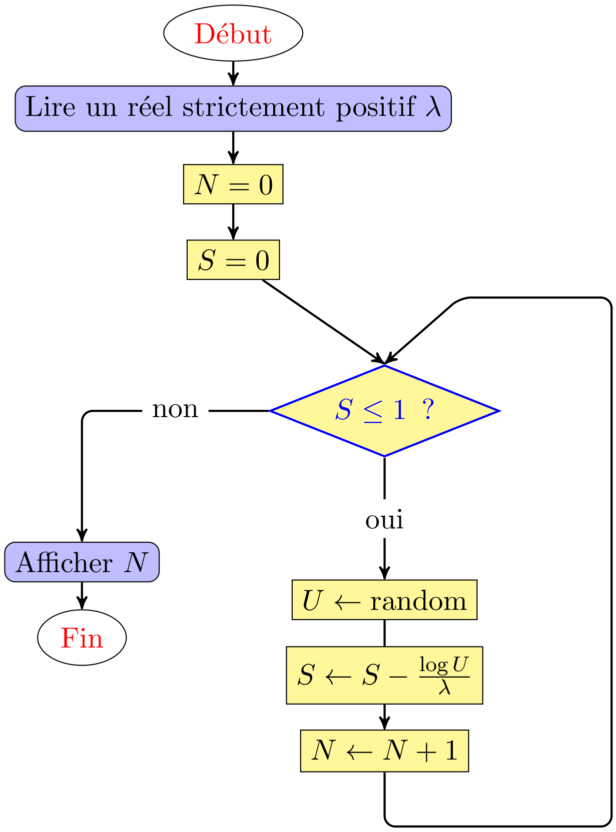
*** Problème II ***

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
Pour $t > 0$, on définit
$$N_t = \sup\{n \geq 0; S_n \leq t\}.$$

1. Soit $\mu < \lambda$. Montrer que la variable aléatoire $Y = e^{\mu X_1}$ est intégrable et calculer $\mathbb{E}[Y]$.
2. (a) Montrer que pour tout entier positif ou nul n, les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
   (b) Montrer que pour tout entier n strictement positif, la variable aléatoire S_n suit une loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$. (On pourra procéder par récurrence sur n).
   On rappelle que la loi gamma $\Gamma(a, \lambda)$ admet la densité par rapport à la mesure de Lebesgue :
   $$f_{a,\lambda}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$$
   et que pour tout entier naturel n, on a $\Gamma(n+1) = n!$.
   (c) Montrer que pour tout réel $t > 0$ et tout entier n positif ou nul, on a $\{N_t > n\} = \{S_{n+1} \leq t\}$.
   (d) Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \leq t) = g_n(\lambda t)$, où on a posé
   $$g_n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t x^{n-1} e^{-x}\, dx.$$
   (e) Montrer que $g_{n+1}(t) = -\frac{1}{\Gamma(n+1)} e^{-t} t^n + g_n(t)$.
   (f) Montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$.
   (g) Montrer que pour tout $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ et $\lambda > 0$. On pose $Y = -\frac{\log U}{\lambda}$. Calculer la fonction de répartition de Y. En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

   (b) Que fait le programme informatique suivant ?



   On admet que chaque appel à la fonction random génère un nombre suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ et se fait indépendamment des précédents.

4. On pourra admettre sans démonstration le résultat d'analyse suivant : si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite telle que pour le réel $\lambda > 0$ on ait $u_n \sim \lambda n$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sup\{n \geq 0; u_n \leq t\}}{t} = \frac{1}{\lambda}.$$

   (a) Montrer que $(\frac{S_n}{n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.

   (b) Montrer que $\frac{N_t}{t}$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.

FIN