Université de Nancy I **Licence 3**

Intégration et Probabilités

corrigé de l'examen du 14 janvier 2011

Problème 1

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. Observons le comportement lorsque t tend vers 0. On a

$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = \frac{(1-e^{-t})e^{-t} - te^{-xt}}{t(1-e^{-t})}.$$

En 0, on a $1 - e^{-t} \sim t$, d'où $t(1-e^{-t}) \sim t^2$. Pour le numérateur,

$$\begin{aligned} e^{-t} - e^{-2t} - te^{-xt} &= (1 - t + O(t^2)) - (1 - 2t + O(t^2)) - t(1 + O(t)) \\ &= (t + O(t^2)) - (t + O(t^2)) \\ &= O(t^2). \end{aligned}$$

Finalement $\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = O(1)$ au voisinage de 0 ce qui donne l'intégrabilité sur $]0, \max(1, x)]$. Pour $t \in [\max(1, x), +\infty[$, on a

$$|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}| \leq \frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \leq e^{-t} + \frac{1}{1-e^{-x}}e^{-xt},$$

ce qui donne l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$.

2.

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1)) \\ &= \frac{1}{n} + \log(1 - 1/n) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \\ &= O(\frac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais $\sum_{k=2}^n (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

3. Pour tout $t > 0$, on a
$$e^{-t} + e^{-2t} + \cdots + e^{-nt} = \frac{e^{-t}(1-e^{-nt})}{1-e^{-t}} = \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}.$$
En intégrant entre 0 et $+\infty$, on obtient
$$\sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} e^{-kt} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}.$$
Or $\int_0^{+\infty} e^{-kt} = \frac{1}{k}$, d'où
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}} = H_n.$$

4. À u fixé, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. En outre, $\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t} = u - 1$, donc la fonction se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale est "faussement impropre" en 0. En l'infini, on a $\frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t} = O(e^{-(\min(1,u)t})$, d'où la convergence de l'intégrale. Par ailleurs $\frac{\partial}{\partial u}\frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t} = e^{-ut}$, ce qui nous donne pour tout $a > 0$
$$\forall u \in [a, +\infty[\quad \forall t > 0 \quad |\frac{\partial}{\partial u}\frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t}| = e^{-ut} \leq e^{-at}.$$
Or $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable, indépendante de u donc $u \mapsto F(u)$ est C^1 sur $]a, +\infty[$, avec $F'(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ut}\, dt = \frac{1}{u}$. Comme a est quelconque strictement positif, le résultat est bien C^1 sur $]0, +\infty[$ tout entier avec $F'(u) = \frac{1}{u}$. Ainsi pour $x > 0$, $F(x) = F(1) + \int_1^x F'(u)\, du = 0 + \int_1^x \frac{du}{u} = \log x$.

5. Il est facile de voir que pour tout $n \geq 1$, on a
$$|e^{-nt}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)| \leq e^{-t}\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right|.$$
Comme pour tout $t > 0$, $\lim_{n\to+\infty} e^{-nt}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)$, si l'on montre que $e^{-t}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)$ est intégrable, le théorème de convergence dominée permettra de conclure que la limite de J_n. Or nous avons déjà démontré que $e^{-t}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)$ est intégrable : c'est la fonction dont l'intégrale définit la valeur de $\psi(1)$.

6. On a
$$\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}=\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-nt}}{t}+\frac{e^{-nt}}{t}-\frac{e^{-nt}}{1-e^{-t}}+\frac{e^{-nt}}{1-e^{-t}}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}},$$
D'où en intégrant entre 0 et $+\infty$, $\psi(1)=F(n)+J_n-H_{n-1}$, où on a utilisé la question 3 pour la dernière identité. Avec la question 4. , on a $\psi(1)=\log n+J_n-H_{n-1}$.
7. $\log(n-1)=\log n+\log(1-1/n)$, donc $\psi(1)=\log(1-1/n)+J_n-(H_{n-1}-\log(n-1))$. Lorsque n tend vers l'infini, $\log(1-1/n)$ tend vers 0, J_n vers 0, et $H_{n-1}-\log(n-1)$ vers γ, d'où $\psi(1)=-\gamma$.

Problème 2

1. (a) Dire que le plus petit élément d'une famille finie est strictement supérieur à t, c'est dire que chacun des éléments de cette famille est est strictement supérieur à t, d'où l'identité
$$\{m_n>t\}=\cap_{i=1}^n\{X_i>t\}.$$
   (b) m_n est le plus petit nombre dans une famille de nombre positifs. Il s'ensuit que $F_{m_n}(t)=P(M_n\le t)=0$ pout t strictement négatif. Soit donc $t\ge 0$: $F_{m_n}(t)=P(M_n\le t)=1-P(M_n>t)$.
$$\begin{aligned} P(m_n>t) &= P(\cap_{i=1}^n\{X_i>t\}) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i>t), \end{aligned}$$
car les X_i sont indépendants. Si $t\ge 0$, tous les termes du produit sont égaux à 1. Sinon, pour tout i, on a
$$\mathbb{P}(X_i>t)=\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\ dx=e^{-\lambda t}.$$
Il s'ensuit que $\mathbb{P}(m_n>t)=(e^{-\lambda t})^n=e^{-n\lambda t}$ et $F_{m_n(t)}=1-e^{-n\lambda t}$ pour $t>0$ tandis que $F_{m_n(t)}=1-1=0$ pour $t\le 0$.
   (c) F_{m_n} a donc la même fonction de répartition qu'une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$: comme la fonction de répartition caractérise la loi, cela signifie que m_n suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

2. (a) La famille $(T = k)_{k \geq 1}$ forme une partition de l'espace. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G > t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G > t, T = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(m_T > t, T = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(m_k > t, T = k)
\end{aligned}$$

m_k est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$, qui est indépendante de T, donc m_k est indépendante de T. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G > t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(m_k > t, T = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(m_k > t)\mathbb{P}(T = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda k t} p(1-p)^{k-1} \\
&= pe^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda(k-1)t}(1-p)^{k-1} \\
&= pe^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-\lambda t}(1-p))^{k-1} \\
&= pe^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{+\infty} (e^{-\lambda t}(1-p))^{i} \\
&= \frac{pe^{-\lambda t}}{1-(1-p)e^{-\lambda t}}.
\end{aligned}$$

(b) Comme G est positive, on a la formule

$$\mathbb{E}[G] = \int_{[0,+\infty[} \mathbb{P}(G > t)\ d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \frac{pe^{-\lambda t}}{1-(1-p)e^{-\lambda t}}\ dt.$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{pe^{-\lambda t}}{1-(1-p)e^{-\lambda t}}$ est

$$t \mapsto \frac{-p}{1-p} \frac{1}{\lambda} \log(1-(1-p)e^{-\lambda}t),$$

ce qui donne $\mathbb{E}[G] = \frac{-p\ln p}{1-p}\frac{1}{\lambda}$.

(c) En 1 $\ln p$ est équivalent à $p-1$et p à 1 donc $\frac{-p\ln p}{1-p}\frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda}$. $\mathbb{E}G$ tend donc vers $\frac{1}{\lambda}$, ce qui est l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ, ce qui est logique, car si $p=1$, alors $T=1$ presque sûrement, donc $m_T = X_1$.

3. (a) $e^{\alpha X_1}$ est positive, donc avec le théorème de transfert

$$\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}] = \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x}\ d\mathbb{P}_{X_1}(x),$$

les deux quantités étant simultanément finies ou infinies. Quand $\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}]$, $e^{\alpha X_1}$ est intégrable. On a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x}\ d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)\lambda e^{-\lambda x} e^{\alpha x}\ dx = \lambda \int_{\mathbb{R}_+} e^{-(\lambda-\alpha)x}\ dx.$$

L'intégrale est finie si $\alpha < \lambda$, et vaut alors $\frac{\lambda}{\lambda-\alpha}$, sinon elle est infinie

(b) Pour $\alpha \leq 0$, on $0 \leq e^{\alpha G} \leq e^0 \leq 1$, donc $e^{\alpha G}$ est intégrable. Soit $\alpha \in]0,\lambda[$. Comme pour tout n, $m_n \leq X_1$, on a $m_T \leq X_1$ soit $G \leq X_1$, d'où $e^{\alpha G} \leq e^{\alpha X_1}$ et $\mathbb{E}[e^{\alpha G}] \leq \mathbb{E}[e^{\alpha X_1}] < +\infty$. Si $T=1$, $T=1$ et $X_1 = G$, donc $1\!\!1_{\{T=1\}} e^{\alpha X_1} = 1\!\!1_{\{T=1\}} e^G \leq e^G$, d'où

$$\mathbb{E}[e^G] \geq \mathbb{E}[1\!\!1_{\{T=1\}} e^{\alpha X_1}]$$

mais $1\!\!1_{\{T=1\}}$ et $e^{\alpha X_1}$ sont indépendantes, donc

$$\mathbb{E}[e^G] \geq \mathbb{E}[1\!\!1_{\{T=1\}}]\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}] = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}] = p\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}] = +\infty$$

grâce à la question précédente. Finalement $e^{\alpha G}$ est intégrable si et seulement si si $\alpha < \lambda$.