Université de Nancy I **Licence 3**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Intégration et Probabilités

Examen du 14 janvier 2011

durée 3h

Les documents et calculatrices sont interdits.

*** Problème I ***

On note ψ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1 - e^{-t}} \right) \, dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

I

1. Vérifier que ψ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = H_n - \log n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite.
   Indication : on pourra étudier la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
   $$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} \, dt.$$
   Indication : on pourra calculer la somme $e^{-t} + e^{-2t} + \cdots + e^{-nt}$.
4. Pour $u > 0$, on pose
   $$F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} \, dt.$$
   Vérifier que F est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'elle est dérivable. En déduire la valeur de F.
5. On pose
   $$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right) \, dt.$$
   Déterminer la limite de J_n quand n tend vers l'infini.

6. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\psi(1) = \log n + J_n - H_{n-1}$.
7. En déduire que $\gamma = -\psi(1)$.

*** Problème II ***

Un responsable informatique d'une PME veut convaincre un décideur de remplacer un système d'exploitation propriétaire peu stable par une solution libre. L'argument utilisé ici est la fréquence du gel d'une application.

Le décideur répond au responsable de lui transmettre chaque jour le temps entre le boot du matin et le premier gel d'application, et lui affirme que l'on procédera au changement si lorsqu'il reviendra, le responsable pourra lui affirmer qu'une application a planté moins d'une minute après son lancement.

Pour chaque $n \geq 1$, on note X_n la durée mesurée le n-ième jour. On note T le jour où le décideur a le temps de se pencher sur le problème.

On suppose que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que T suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et est indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$.

On pose, pour tout $n \geq 1$: $m_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

On note

$$G = m_T$$

la plus courte durée avant gel constatée jusqu'au retour du décideur.

1. (a) Soit t un réel quelconque. Justifier, par une phrase en français, l'identité
$$\{m_n > t\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > t\}.$$
   (b) Montrer que la fonction de répartition de m_n vérifie
$$F_{m_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda n t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
   (c) Montrer que m_n suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.
2. (a) Soit $t > 0$. Montrer soigneusement
$$\mathbb{P}(G > t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(m_k > t, T = k) = \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - (1-p)e^{-\lambda t}}.$$
   (b) En déduire que
$$\mathbb{E}[G] = \frac{-p \ln p}{1-p} \frac{1}{\lambda}.$$
   (c) Que se passe-t'il pour $\mathbb{E}[G]$ lorsqu'on fait tendre p vers 1 ? Ce résultat vous semble-t-il conforme à l'intuition ?
3. (a) Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $e^{\alpha X_1}$ est intégrable. Dans ce cas, calculer $\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}]$.
   (b) Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $e^{\alpha G}$ est intégrable.
   Indication : on pourra montrer que $\mathbb{1}_{\{T=1\}} e^{\alpha X_1} \leq e^{\alpha G} \leq e^{\alpha X_1}$.

FIN