Université de Nancy I **Licence 3**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Intégration et Probabilités

Examen du 12 janvier 2010

durée 3h

Les documents et calculatrices sont interdits.

Toutes les variables aléatoires considérées dans le sujet sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La lettre $\mathbb{E}$ représente l'intégration par rapport à $\mathbb{P}$: pour toute variable aléatoire intégrable Y, on a $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\ d\mathbb{P}(\omega)$. Dans tout le sujet, log désigne le logarithme népérien. On attire particulièrement l'attention du candidat sur les questions marquées d'un ♡ .

Exercice 1 ($\approx$ 7 points)

1. ♡ À l'aide d'un développement en série entière, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}.$$

2. On donne

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right).$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{3\log 2 + \sqrt{3}\pi}{9}.$$

Exercice 2 ($\approx$ 4 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \geq 1$, X_n suit (sous $\mathbb{P}$) une loi exponentielle de paramètre $2\log(1+n)$.

1. ♡ Montrer qu'il existe une constante A telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \frac{A}{n^2}.$$

2. Montrer que $\mathbb{P}$-presque sûrement, les X_n sont tous plus petits que 1 à partir d'un certain rang.

Problème ($\approx$ 19 points)

Soit $p_0 > 1$ et X une variable aléatoire positive telle que $X \in L^{p_0}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $p \in]0, p_0]$, on pose $N(p) = (\mathbb{E}[X^p])^{1/p}$.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose qu'on a défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une collection de variables aléatoires $(X_t)_{t\in I}$ et une variable aléatoire Y telles que
   – Pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue.
   – Pour tout $t \in I$, $|X_t| \leq Y$.

– $\mathbb{E}[Y] < +\infty$.
Montrer que l'application $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ est bien définie et forme une application continue sur I. (Ceci est une application directe du cours ; on précisera clairement le théorème employé.)

2. En appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions X^p et 1 avec des exposants bien choisis, montrer que la fonction $p \mapsto N(p)$ est croissante sur $]0, p_0]$.
3. ♡ Montrer que $N(p)$ admet une limite réelle lorsque p tend vers 0. Déterminer cette limite dans le cas où X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
4. Montrer que pour tout $p \in]0, p_0]$, on a l'inégalité $X^p \leq 1 + X^{p_0}$, puis que $p \mapsto \mathbb{E}[X^p]$ est continue sur $]0, p_0]$. En déduire que $p \mapsto N(p)$ est continue sur $]0, p_0]$.
Indication : on pourra remarquer que $N(p) = G(\mathbb{E}[X^p], p)$ où $G(x, y) = x^{1/y}$.
5. Soit $p \in]0, p_0]$. On admet que la fonction
$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, t) & \mapsto & pt^{p-1} 1\!\!1_{\{x \geq t\}} \end{array}$$
est $(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.
Montrer que $F \in L^1(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2), \mathbb{P}_X \otimes \lambda)$, puis que
$$\mathbb{E}[X^p] = \int_{[0,+\infty[} pt^{p-1} \mathbb{P}(X \geq t) \, d\lambda(t).$$
Note : on rappelle que $1\!\!1_{\{x \geq t\}}$ vaut 1 si $x \geq t$, 0 sinon.
6. Soient p_1, p_2 avec $0 < p_1 < p_2 < p_0$.
   (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que
   $$\forall x \geq 1 \quad \log x \leq A x^{p_0 - p_2}$$
   et
   $$\forall x \in]0, 1[\quad -\log x \leq B x^{-p_1/2}.$$
   (b) On pose, pour $x > 0$,
   $$\Psi(x) = x^{p_1 - 1}(1 - p_2 \log x) 1\!\!1_{[0,1]}(x) + (1 + p_2 \log x) x^{p_2 - 1} \mathbb{P}(X \geq x) 1\!\!1_{]1,+\infty[}(x).$$
   Montrer que
   $$\int_{]0,+\infty[} \Psi(x) \, d\lambda(x) \leq \frac{2Bp_2 + 1}{p_1} + \frac{p_2}{p_0} A \mathbb{E}[X^{p_0}] + \frac{1}{p_2} \mathbb{E}[X^{p_2}],$$
   où A et B sont des constantes telles que déterminées à la question précédente.
   (c) Montrer que la fonction $p \mapsto N(p)$ est C^1 sur $]0, p_0[$.
7. Soit X une variable aléatoire positive. On note
$$\|X\|_{\infty,\text{ess}} = \sup\{M > 0 : \mathbb{P}(X \geq M) > 0\}.$$
On suppose dorénavant que X est telle que $\|X\|_{\infty,\text{ess}} < +\infty$.
   (a) Soit $M > \|X\|_{\infty,\text{ess}}$. Montrer que pour tout $p > 1$, $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $N(p) \leq M$.
   (b) Montrer que $\overline{\lim\limits_{p \to +\infty}} N(p) \leq \|X\|_{\infty,\text{ess}}$.
   (c) Soit $M < \|X\|_{\infty,\text{ess}}$. Montrer que pour tout $p > 1$,
   $$N(p) \geq M \mathbb{P}(X \geq M)^{1/p},$$
   puis que $\underline{\lim\limits_{p \to +\infty}} N(p) \geq M$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} N(p) = \|X\|_{\infty,\text{ess}}$.

FIN