Devoir en temps libre
Corrigé

Problème

Question préliminaire

Pour tout $n \geq 1$ la fonction $a(.,n)$ est dominée par la fonction c, qui est intégrable par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$. Chacune de ces fonctions est donc intégrable par rapport à la mesure de comptage, ce qui signifie que les séries de terme général $(a(k,n))_{k\geq 1}$ sont absolument convergentes. De plus, la suite de fonctions $a(.,n)_{n\geq 1}$ converge (partout) vers la fonction $a(.,\infty)$. On a convergence (partout) de la suite de fonctions et domination par une fonction intégrable, le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique : la limite des intégrales est l'intégrale de la fonction limite, soit

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a(k,n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k,\infty).$$

I

1. Remarquons que, pour $x \in E_k$, $\sum_{i=1}^{k} x_i$ ne peut être que pair ou impair, mais jamais les deux à la fois. Autrement dit, A_k et B_k forment une partition de E_k.
   Soit $x \in E_k$, et $y = \Psi(x)$. On a $\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k} y_i = 2x_1 - 1$: c'est un nombre impair. Donc $\sum_{i=1}^{k} x_i$ et $\sum_{i=1}^{k} y_i$ ne sont pas de même parité. On a donc
   $$\begin{cases} \Psi(A_k) \subset B_k \\ \Psi(B_k) \subset A_k \end{cases}$$

On en déduit
$$\begin{cases}(\Psi\circ\Psi)(A_k)\subset\Psi(B_k)\\(\Psi\circ\Psi)(B_k)\subset\Psi(A_k)\end{cases}$$
Mais il est aisé de constater que $\Psi\circ\Psi$ est l'identité : par doubles inclusions, on a donc $\Psi(A_k)=B_k$ et $\Psi(B_k)=A_k$. Ψ est involutive, donc injective : elle réalise donc une bijection de A_k sur son image, c'est à dire une bijection de A_k sur B_k.

2. Comme A_k et B_k forment une partition de E_k, on a $|A_k|+|B_k|=|E_k|=2^k$. Comme A_k et B_k sont en bijection, ils ont même cardinal. On en déduit $|A_k|=|B_k|=2^{k-1}$.
3. Suivant l'indication, on peut repérer l'état de lassitude de l'assistance par un élément de E_k : $x_k=1$ si le k-ième étudiant s'ennuie, $x_k=0$ sinon. $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i$ représente le nombre de x_i égaux à un, donc le nombre d'étudiants s'ennuyant. Reste à mettre une probabilité sur E_k : on choisit la probabilité uniforme, ou équiprobabilité.

   (Cela revient à dire que chaque étudiant choisit d'être intéressé avec probabilité 1/2, indépendemment des autres. Cette modélisation est évidemment discutable, mais la nature fantaisiste de la question posée nous autorise à ne pas trop nous attarder sur son adéquation au réel et à nous concentrer sur les mathématiques. Le lecteur insolent trouvera de lui-même un choix de P tel que $P(A_k)=(1+(-1)^k)/2$.)

   On a alors $P(A_k)=\frac{|A_k|}{|E_k|}=\frac{2^{k-1}}{2^k}=\frac{1}{2}$.

II

1. Le cardinal d'un produit cartésien d'ensemble est le produit des cardinaux de ses facteurs, d'où le résultat.
2. Les diviseurs de n sont exactement les entiers qui peuvent s'écrire — de manière nécessairement unique — sous la forme $d=\prod_{i=1}^k p_i^{\nu_i}$, où les ν_i sont des entiers vérifiant $0\le\nu_i\le\alpha_i$. Ainsi f réalise une bijection entre Ω_n et Ω'_n, l'ensemble des diviseurs de n. On en déduit que $|\Omega'_n|=|\Omega_n|=\prod\limits_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$ éléments. Soit $X\in\Omega'_n$: on a
$$Q_f(X)=Q(f^{-1}(X))=\frac{|f^{-1}(X)|}{|\Omega_n|}=\frac{|X|}{|\Omega_n|},$$
car f est une bijection de Ω_n dans Ω'_n.

D'autre part,
$$Q'(X) = \frac{|X|}{|\Omega'_n|} = \frac{|X|}{|\Omega_n|}.$$
On a donc $Q_f = Q'$, ce qui signifie que Q' est la mesure image de Q par f.

3. Par définition de Z_k, E_k et Z_k forment une partition de Ω_n. Comme A_k et B_k forment une partition de E_k, A_k, B_k et Z_k forment une partition de Ω_n. On en déduit
$$\forall \omega \in \Omega_n \quad 1 = 1\!\!1_{A_k}(\omega) + 1\!\!1_{B_k}(\omega) + 1\!\!1_{Z_k}(\omega),$$
puis
$$\forall \omega \in \Omega_n \quad g(\omega) = g(\omega)1\!\!1_{A_k}(\omega) + g(\omega)1\!\!1_{B_k}(\omega) + g(\omega)1\!\!1_{Z_k}(\omega).$$
On intègre :
$$\int_{\Omega_n} g(\omega)\, dQ(\omega) = \int_{\Omega_n} g(\omega)1\!\!1_{A_k}(\omega)\, dQ(\omega) + \int_{\Omega_n} g(\omega)1\!\!1_{B_k}(\omega)\, dQ(\omega) + \int_{\Omega_n} g(\omega)1\!\!1_{Z_k}(\omega)\, dQ(\omega).$$
Il suffit de se souvenir que, par définition $\int_F g(\omega)\, dQ(\omega) = \int_{\Omega_n} 1\!\!1_F(\omega)g(\omega)\, dQ(\omega)$ pour conclure.

4. Écrivons la décomposition de $f(\nu)$ en produit de facteurs premiers : on a
$$f(\nu) = \prod_{i:\nu_i>0} p_i^{\nu_i}.$$
Si $\nu \notin E_k$, alors il existe i tel que $\nu_i \geq 2$ et donc $\mu(f(\nu)) = 0$. Si $\nu \in E_k$, alors les ν_i valent tous 0 ou 1 : si on pose $k = |\{i; \nu_i = 1\}|$, $f(\nu) = \prod_{i:\nu_i=1} p_i$ est produit de k nombre premiers distincts, donc $f(\nu) = (-1)^k = (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{k} \nu_k\right)}$.

5. Comme Q' est la mesure image de Q par f, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'_n} \mu(x)\ dQ'(x) &= \int_{\Omega'_n} \mu(x)\ dQ_f(x) \\
&= \int_{\Omega_n} \mu(f(\omega))\ dQ(\omega) \\
&= \int_{A_k} \mu(f(\omega))\ dQ(\omega) + \int_{B_k} \mu(f(\omega))\ dQ(\omega) + \int_{Z_k} \mu(f(\omega))\ dQ(\omega) \\
&= \int_{A_k} 1\ dQ(\omega) + \int_{B_k} (-1)\ dQ(\omega) + \int_{Z_k} 0\ dQ(\omega) \\
&= Q(A_k) - Q(B_k) + 0.
\end{aligned}$$

6. Pour $n = 1$, l'identité demandée ne fait pas de mystère, puisque 1 est le seul diviseur de 1.

   Pour $n > 1$, on reprenons l'identité trouvée à la question précédente : on a
   $$\int_{\Omega'_n} \mu(x)\ dQ'(x) = Q(A_k) - Q(B_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega_n|} - \frac{|B_k|}{|\Omega_n|},$$
   car on a vu en $I.2$ que $|A_k| = |B_k|$.
   Mais d'autre part, comme Q' est la mesure uniforme sur Ω'_n, on a
   $$\int_{\Omega'_n} \mu(x)\ dQ'(x) = \frac{1}{|\Omega'_n|} \sum_{x \in \Omega'_n} \mu(x) = \frac{1}{|\Omega'_n|} \sum_{d|n} \mu(d).$$

   On a donc $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$.

7. La définition de μ permet de voir que $\mu(d) = 0$ si et seulement si d est divisible par le carré d'un nombre premier. $\mu(d) = 0$ implique donc l'existence d'un carré autre que 1 divisant d. Réciproquement, si il existe un entier $m \geq 2$ $m^2|d$, alors si p est un nombre premier divisant m, alors p^2 divise m^2, donc p^2 divise d et $\mu(d) = 0$.

   On cherche donc
   $$Q'(\mu(d) = 0) = Q(Z_k) = 1 - Q(E_k) = 1 - \frac{|E_k|}{|\Omega_n|} = 1 - \frac{2^k}{\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)}.$$

   On a $2000 = 2^4 \times 5^3$: avec les notations précédentes, on a $k = 2$ et $|\Omega_n| = (4+1)(3+1) = 20$. La probabilité cherchée est $1 - \frac{4}{20} = \frac{4}{5}$.

III

1. On a évidemment $F_k = G_k \times G_k$, où $G_k = \{u \in \{1, ..., n\}\ k|u\}$, donc on aura $\mathrm{Card}(F_k) = \mathrm{Card}(G_k)^2$. On veut donc compter les multiples de k compris entre 1 et n : cela revient à compter les entiers $m \geq 1$ tels que $mk \leq n$, soit $m \leq n/k$. Mais pour m entier, cette dernière égalité est équivalente à $m \leq \mathrm{Ent}(n/k)$: on a donc $\mathrm{Card}(G_k) = \mathrm{Ent}(n/k)$, d'où le résultat voulu.

2. Pour k et l premiers entre eux, le lemme d'Euclide montre que les multiples communs à k et l sont les multiples de kl : on a donc $G_k \cap G_l = G_{kl}$, puis $F_k \cap F_l = F_{kl}$, d'où $P_n(F_k \cap F_l) = P_n(F_{kl})$. Pour $\alpha_1, ..., \alpha_m$ entiers deux à deux premiers entre eux, on montre par récurrence sur m
$$P_n(\cap_{i=1}^m F_{\alpha_i}) = P_n(F_{\prod_{1 \leq i \leq m} \alpha_i}).$$
(On utilise le fait que si m entiers sont deux à deux premiers entre eux, l'un quelconque d'entre eux est premier avec le produit des autres.)

3. Dire que deux entiers ne sont pas premiers entre eux équivaut à dire qu'ils ont un diviseur premier commun. Quand, de plus, ces deux entiers ne dépassent pas n, cela équivant à dire qu'ils ont un diviseur premier commun inférieur ou égal à n, puisqu'un entier strictement positif n'a jamais de diviseur plus grand que lui-même. L'événement F est donc le complémentaire de l'événement {Les deux entiers sont premiers entre eux.}. L'égalité demandée s'ensuit.

4. III.3 et la formule de Poincaré donnent
$$p_n = 1 - \sum_{B \in \mathcal{P}(\{1,...,k\}) \setminus \{\varnothing\}} (-1)^{1+|B|} P(\bigcap_{j \in B} F_{\beta_j}) = 1 + \sum_{B \in \mathcal{P}(\{1,...,k\}) \setminus \{\varnothing\}} (-1)^{|B|} P(\bigcap_{j \in B} F_{\beta_j})$$
Mais $(-1)^{|B|} = \mu(\prod_{j \in B} \beta_j)$ et $P_n(\bigcap_{j \in B} F_{\beta_j}) = P_n(F_{\prod_{j \in B} \beta_j})$. On a donc
$$p_n = 1 + \sum_{B \in \mathcal{P}(\{1,...,k\}) \setminus \{\varnothing\}} \mu(\prod_{j \in B} \beta_j) P_n(F_{\prod_{j \in B} \beta_j})$$
Si $\prod_{j \in B} \beta_j$ est plus grand que n, alors $P_n(F_{\prod_{j \in B} \beta_j}) = 0$: on peut enlever ces termes. Les autres termes donnent à $\prod_{j \in B} \beta_j$ les valeurs

de tous les entiers de 2 à n tels que $\mu(d) \neq 0$, et chaque entier est représenté une seule fois (on utilise l'unicité de la décomposition en produits de facteurs premiers. On en déduit

$$p_n = 1 + \sum_{2 \leq d \leq n \text{ et } \mu(d) \neq 0} \mu(d) P_n(F_d) = 1 + \sum_{d=2}^{n} \mu(d) P_n(F_d) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) (\mathrm{Ent}(\frac{n}{d}))^2$$

(on a rajouté les termes pour lesquels $\mu(d) = 0$: ils ne changent pas la somme).

5. (a) Si $k > n$, l'inégalité demandée est évidente. Pour $n \geq k$, c'est une conséquence facile des inégalités $0 \leq \mathrm{Ent}(\frac{n}{k}) \leq \frac{n}{k}$ et $|\mu(k)| \leq 1$. Fixons maintenant $k \in \mathbb{N}^*$. On a l'inégalité

$$\frac{n}{k} - 1 \leq \mathrm{Ent}(\frac{n}{k}) \leq \frac{n}{k},$$

d'où

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\mathrm{Ent}(\frac{n}{k}) - \frac{1}{k} \leq 0.$$

On a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Ent}(\frac{n}{k}) = \frac{1}{k},$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} a(k, n) = \frac{\mu(k)}{k^2}.$$

(b) Il suffit d'appliquer le résultat démontré en question préliminaire avec $c_k = \frac{1}{k^2}$ et $a(k, \infty) = \mu(k)\frac{1}{k^2}$.

6. On va appliquer le résultat donné en préliminaire sur les séries absolument convergentes, avec $u_n = \mu(n)/n^2$ et $v_n = 1/n^2$

$$(u * v)_n = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d^2} \times \frac{1}{(n/d)^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} \mu(d)$$

Donc, d'après II.4 $(u * v)_1 = 1$ et $(u * v)_n = 0$ pour $n > 1$. On a alors

$$p \times \frac{\pi^2}{6} = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u * v)_n = 1$$

On en déduit

$$p = \frac{6}{\pi^2}.$$

7. La formulation employée est inexacte : il n'existe pas de probabilité uniforme sur un ensemble dénombrable (voir le cours). En revanche, si l'on se fixe des bornes très grandes pour le maximum des deux nombres choisis, on a montré que la probabilité pour que deux entiers plus petits que la borne pris au hasard soit premiers entre eux est proche de $6/\pi^2$. Formalisons cela : soit K l'ensemble des couples d'entiers premiers entre eux : on a montré

$$d(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Card}(K \cap \{1, ..., n\}^2)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

d(K) est appelée la densité naturelle de K : Pour certaines parties de $\mathbb{N}^2$, on peut définir ainsi une densité. Malheureusement, la densité n'est pas une probabilité : on peut recopier tous les axiomes des probabilités, à l'exception notable du fait qu'il faut remplacer à chaque fois dénombrable par fini. Mais ceci est une autre histoire...