Université d'Orléans

Licence de Mathématiques

Unité L6MT02

Intégration, Fourier, Probabilités

Devoir n° 1

Problème

Notations et résultats admis

- Si E est un ensemble fini, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E et $|E|$ le cardinal de E. Si E est non-vide, alors il existe une unique mesure P sur $(E, \mathcal{P}(E))$ vérifiant $\forall x \in E \quad P(\{x\}) = \frac{1}{|E|}$. Cette mesure est une mesure de probabilité, appelée (mesure de) probabilité uniforme sur E. Elle vérifie la propriété suivante :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad P(A) = \frac{|A|}{|E|}.$$
- Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x et on note $\mathrm{Ent}(x)$ l'unique entier n vérifiant $n \leq x < n+1$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Lorsque n et k sont des entiers, l'écriture $k|n$ signifie "k divise n".
  Si les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont absolument convergentes, alors on a l'identité
$$\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)\left(\sum_{n\geq 1} v_n\right) = \sum_{n\geq 1} (u*v)_n,$$
  où l'on a posé
$$(u*v)_n = \sum_{d|n} u_d v_{n/d}.$$
  Par exemple
$$(u*v)_6 = u_1v_6 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_6v_1.$$

– Formule de Poincaré (aussi appelée formule du crible) Pour tous événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sous la probabilité P

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{B\in\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})\setminus\varnothing} (-1)^{1+\mathrm{Card}(B)} P\big(\bigcap_{j\in B} A_j\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1\cap\cdots\cap A_n). \end{aligned}$$

Question préliminaire

Soit donnée une famille de nombres réels $a(k,n)$ pour $k \geq 1, n \geq 1$ entiers. On suppose qu'il existe une suite de nombres réels positifs $(c_k)_{k\geq 1}$ avec les propriétés :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad |a(k,n)| \leq c_k, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} c_k < +\infty.$$

On suppose que pour tout $k \geq 1$, la limite suivante existe :

$$\lim_{n\to+\infty} a(k,n) = a(k,\infty).$$

Montrer que les deux séries $s_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k,n)$ et $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k,\infty)$ convergent absolument et que l'on a $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, soit

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a(k,n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k,\infty)$$

I

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_k = \{0,1\}^k$.

Soit $A_k = \{x \in E_k;\ \sum_{i=1}^{k} x_i \text{ est pair}\}$ et $B_k = \{x \in E_k;\ \sum_{i=1}^{k} x_i \text{ est impair}\}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : E_k &\to E_k \\ (x_1, x_2, \ldots, x_k) &\mapsto (1-x_1, x_2, \ldots, x_k) \end{aligned}$$

réalise une bijection de A_k dans B_k.

2. Montrer que pour tout entier naturel k non nul
$$|A_k| = |B_k| = 2^{k-1}.$$

3. k étudiants assistent à un cours de mathématiques. Quelle est la probabilité pour que le nombre d'étudiants qui s'ennuyent soit pair ? Préciser les hypothèses simplificatrices que vous choisirez de prendre.
Indication : Repérer l'état de lassitude des étudiants en associant à chaque étudiant un élément de $\{0,1\}$ suivant l'intérêt qu'il porte au cours.

II

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On décompose n en produits de facteurs premiers :
$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i},$$
où pour tout i dans $\{1, ..., k\}$, p_i est un nombre premier et α_i un entier strictement positif, les p_i étant deux à deux distincts. On pose
$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si il existe } i \text{ tel que } \alpha_i > 1, \\ (-1)^k & \text{sinon.} \end{cases}$$
On pose également $\mu(1) = 1$.
On a ainsi défini une fonction $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$.
Cette fonction est appelée fonction de Moëbius.
On pose
$$\Omega_n = \{0, \ldots, \alpha_1\} \times \{0, \ldots, \alpha_2\} \times \cdots \times \{0, \ldots, \alpha_k\}$$
et on note Ω'_n l'ensemble des diviseurs positifs de n. On note Q la mesure de probabilité uniforme sur Ω_n et Q' la mesure de probabilité uniforme sur Ω'_n.

1. Montrer que $|\Omega_n| = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$.
2. Soit f l'application :
$$\begin{array}{ccc} \Omega_n & \to & \mathbb{N} \\ (\nu_1, \ldots, \nu_k) & \mapsto & \prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i} \end{array}$$
Montrer que Q' est la mesure image de Q par f.

3. On pose $Z_k = \Omega_n \backslash E_k$. Montrer que pour toute fonction g de Ω_n dans $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\Omega_n} g(\omega)\, dQ(\omega) = \int_{A_k} g(\omega)\, dQ(\omega) + \int_{B_k} g(\omega)\, dQ(\omega) + \int_{Z_k} g(\omega)\, dQ(\omega)$$

4. Montrer $\forall \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \Omega_n$

$$(\mu \circ f)(\nu) = \begin{cases} (-1)^{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \nu_i\right)} & \text{si } \nu \in E_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. En utilisant le théorème d'intégration par rapport à une mesure image – appelé aussi théorème de transfert – , montrer que

$$\int_{\Omega'_n} \mu(x)\, dQ'(x) = Q(A_k) - Q(B_k).$$

6. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. On choisit au hasard - avec équiprobabilité - un diviseur de 2000. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit divisible par un carré autre que 1 ?

III

Pour n fixé, soit Ω l'ensemble des couples d'entiers $(u, v) \in \{1, ..., n\}^2$. On suppose que tous les couples sont équiprobables. On note donc P_n la probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$P_n(A) = \frac{1}{n^2}|A|.$$

On note p_n la probabilité pour que deux entiers pris "au hasard" entre 1 et n soient premiers entre eux.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_k = \{(u, v) \in \Omega;\ k|u \text{ et } k|v\}$.

1. Montrer $P_n(F_k) = (\text{Ent}(n/k))^2/n^2$.

2. Montrer que si k et l sont premiers entre eux, alors

$$P_n(F_k \cap F_l) = P_n(F_{kl}).$$

Généraliser au cas de m entiers deux à deux premiers entre eux.

3. Soient $\beta_1, ..., \beta_k$ les nombres premiers compris entre 2 et n.
On pose $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_{\beta_i}$.
Montrer $p_n = 1 - P_n(F)$.

4. En utilisant la formule de Poincaré, montrer

$$p_n = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \frac{1}{n^2} (\mathrm{Ent}(\frac{n}{d}))^2.$$

Indication : il pourra être utile de remarquer que pour tout entier d compris entre 1 et n, $\mu(d)$ est non-nul si et seulement si d peut s'écrire comme produit d'éléments deux à deux distincts pris dans l'ensemble $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$.

5. (a) On pose

$$a(k,n) = \begin{cases} \mu(k) \frac{1}{n^2} (\mathrm{Ent}(\frac{n}{k}))^2 & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer

$$\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad |a(k,n)| \leq \frac{1}{k^2}$$

ainsi que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \lim_{n \to \infty} a(k,n) = \frac{\mu(k)}{k^2}.$$

(b) Établir que la suite $(p_n)_{n \geq 2}$ converge vers

$$p = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

6. Calculer p.
Indication : on pourra appliquer le résultat sur les séries absolument convergentes admis en introduction avec $u_n = \frac{\mu(n)}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$, puis utiliser II.6.

7. Que pensez vous de l'affirmation suivante :
« La probabilité pour que deux entiers pris au hasard soient premiers entre eux est $6/\pi^2$. » ?