Unité L6MT02

Intégration, Fourier, Probabilités

correction de l'examen du 28 juin 2007

Exercice I

Posons $Y_n = X_n^3$. Comme les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, les $(Y_n)_{n\geq 1}$ le sont aussi. Elles suivent toutes la même loi, à savoir la loi image de la loi uniforme sur $[0;2]$ par l'application $x \mapsto x^3$. On a $|Y_n| \leq 2$, donc les $(Y_n)_{n\geq 1}$ admettent des moments de tous ordres.

D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}X_1^3 = \int_{[0;2]} \frac{1}{2}x^3\ dx = \frac{2^4}{2.4} = 2.$$

Les $(Y_n)_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 1 : d'après la loi forte des grands nombres, S_n/n converge donc vers $\mathbb{E}Y_1 = 2$.

Par ailleurs, les $(Y_n)_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2 : d'après la loi forte des grands nombres, $(S_n - n\mathbb{E}Y_1)/\sqrt{n} = (S_n - 2n)/\sqrt{n}$ converge donc vers $\mathcal{N}(0, \operatorname{Var} Y_1)$. Il n'y a plus qu'à calculer sa valeur exacte : $\operatorname{Var} Y_1 = \mathbb{E}Y_1^2 - (\mathbb{E}Y_1)^2 = \mathbb{E}X_1^6 - 4$.

D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}X_1^6 = \int_{[0;2]} \frac{1}{2}x^6\ dx = \frac{2^7}{2.7} = \frac{2^6}{7}.$$

Finalement

$$\operatorname{Var} Y_1 = \frac{2^6}{7} - 4 = 4(\frac{2^4}{7} - 1) = \frac{4(16-7)}{7} = \frac{36}{7}.$$

Exercice II

1. X_i ne prend que les valeurs 1 et -1 donc $|X_i| = 1$. Etant bornée, X_i est bien sûr intégrable. $\mathbb{E}X_i = (1)\mathbb{P}(X_i = 1) + (-1)\mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Si $i = j$, on a $\mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}1 = 1$. Si $i \neq j$, X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes admettant toutes deux un moment d'ordre un, donc leur

produit est intégrable et son espérance est le produit des espérances : $\mathbb{E}X_iX_j = \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j = 0.0 = 0$. Montrer que quels que soient les entiers relatifs i et j, on a $\mathbb{E}X_i = 0$ et $\mathbb{E}X_iX_j = \delta_{i,j}$.

2. On a pour tout ω et tout n $|a_jX_{j+n}(\omega)| = |a_j|$: ainsi la série de terme général $(a_jX_{j+n}(\omega))_{j\in\mathbb{Z}}$ converge absolument, donc converge, ce qui signifie que Z_n^N converge lorsque N tend vers l'infini. On a pour tout N

$$|Z_n^N| \le \sum_{|j|\le N} |a_jX_{j+n}| = \sum_{|j|\le N} |a_j| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_j| = S.$$

L'inégalité est préservée lorsque N tend vers l'infinie, de sorte que $|Z_n| \le S$. Ainsi, Z_n est bornée, et admet donc des moments de tous ordres.

3. Soit n fixé.Par linéarité, on a facilement

$$\mathbb{E}Z_n^N = \sum_{|j|\le N} a_j\mathbb{E}X_{j+n} = 0.$$

Comme on a pour tout N $|Z_n^N| \le S$ et que S est intégrable (c'est une constante), le théorème de convergence dominée s'applique et l'on a donc $\mathbb{E}Z_n = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}Z_n^N = 0$. On sait que $|Z_j^N Z_{j'}^N| \le S^2$ et que $Z_j^N Z_{j'}^N$ tend presque sûrement vers Z_jZ_j'. D'après le théorème de convergence dominée $\mathbb{E}Z_j^N Z_{j'}^N = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}Z_j^N Z_{j'}^N$. Maintenant

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Z_j^N Z_{j'}^N &= \mathbb{E}\sum_{|i|\le N} a_iX_{j+i} \sum_{|i'|\le N} a_{i'}X_{j'+i'} \\
&= \sum_{|i|\le N}\sum_{|i'|\le N} a_ia_{i'}\mathbb{E}X_{j+i}X_{j'+i'} \\
&= \sum_{|i|\le N}\sum_{|i'|\le N} a_ia_{i'}\delta_{j+i,j'+i'} \\
&= \sum_{|i|\le N}\sum_{|i'|\le N} a_ia_{i'}\delta_{j-j'+i,i'} \\
&= \sum_{|i|\le N} 1\!\!1_{\{|j-j'+i|\le N\}} a_ia_{i+j-j'} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} 1\!\!1_{\{|i|\le N\}} 1\!\!1_{\{|j-j'+i|\le N\}} a_ia_{i+j-j'}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}Z_j^N Z_{j'}^N$ est l'intégrale de $i \mapsto 1\!\!1_{\{|i|\le N\}} 1\!\!1_{\{|j-j'+i|\le N\}} a_ia_{i+j-j'}$ par rapport à la mesure de comptage. Il est facile de voir que pour pout i est tout N, on a

$$|1\!\!1_{\{|i|\le N\}} 1\!\!1_{\{|j-j'+i|\le N\}} a_ia_{i+j-j'}| \le |a_i||a_{i+j-j'}| \le S|a_i|$$

et que

$$\lim_{N\to+\infty} 1\!\!1_{\{|i|\le N\}} 1\!\!1_{\{|j-j'+i|\le N\}} a_ia_{i+j-j'} = a_ia_{i+j-j'}.$$

Comme $i \mapsto \leq S|a_i|$ est intégrable par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$, le théorème de convergence dominée s'applique, et l'on a

$$\mathbb{E}Z_j^N Z_{j'}^N = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}Z_j^N Z_{j'}^N = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i a_{i+j-j'}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\sum_{j'\in\mathbb{Z}} |\mathbb{E}Z_j Z_{j'}| &= \sum_{j'\in\mathbb{Z}} |\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i a_{i+j-j'}| \\
&\leq \sum_{j'\in\mathbb{Z}} \sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i||a_{i+j-j'}| \\
&= \sum_{j'\in\mathbb{Z}} |a_{i+j-j'}| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i|| \right) \\
&= \sum_{j'\in\mathbb{Z}} |a_{i+j-j'}| S \\
&= S^2
\end{aligned}$$

4. $U_n = \sum_{j=1}^n Z_j$ et $U_{n+k} = \sum_{j=1}^{n+k} Z_j$, donc $U_{n+k} - U_n = \sum_{j=n+1}^{n+k} Z_j$, puis

$$(U_{n+k} - U_n)^2 = \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} Z_j Z_{j'},$$

d'où

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] = \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} \mathbb{E}Z_j Z_{j'}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] &\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} |\mathbb{E}Z_j Z_{j'}| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'\in\mathbb{Z}} |\mathbb{E}Z_j Z_{j'}| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} S^2 \\
&\leq S^2 k.
\end{aligned}$$

On remarque qu'en particulier $\mathbb{E}U_k^2 = \mathbb{E}(U_k - U_0)^2 \leq S^2 k$.

5. (a) En utilisant l'inégalité de Markov, on a

$$u_n = \mathbb{P}(|U_{n^2}| > \epsilon n^2) \leq \mathbb{P}(U_{n^2}^2 > \epsilon^2 n^4) \leq \frac{\mathbb{E}U_{n^2}^2}{\epsilon^2 n^4} \leq \frac{S^2 n^2}{\epsilon^2 n^4} = \frac{S^2 \epsilon^{-2}}{n^2}$$

ce qui assure la convergence de la série

(b) Soit $\epsilon > 0$. Comme la série de terme général $\mathbb{P}(|U_{n^2}| > \epsilon n^2) = \mathbb{P}(\frac{|U_{n^2}|}{n^2} > \epsilon n^2)$ converge, le lemme de Borel-Cantelli assure que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty}\{\frac{|U_{n^2}|}{n^2} > \epsilon n^2\}) = 0.$$

Comme ϵ est quelconque, le critère fondamental de convergence presque sûre entraîne que la suite $(\frac{U_{n^2}}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

6. On pose, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \max\{|U_k - U_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\}.$$

(a) Soit $\epsilon > 0$. Par définition de V_n, on a

$$\{V_n > \epsilon n^2\} \quad = \quad \cup_{n^2<k<(n+1)^2}\{|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2\}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_n > \epsilon n^2) \quad &\leq \quad \sum_{n^2<k<(n+1)^2} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2) \\
&= \quad \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2).
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 1$ et k entre n^2+1 et $(n+1)^2-1$: on peut écrire $k = n^2+l$, avec $l \in \{1,\dots,2n\}$. On a

$$\mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2) = \mathbb{P}((U_k - U_{n^2})^2 > \epsilon^2 n^4) \leq \frac{\mathbb{E}(U_{n^2} - U_k)^2}{\epsilon^2 n^4} \leq \frac{S^2 l}{\epsilon^2 n^4} \leq \frac{2S^2\epsilon^{-2}}{n^3},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_n > \epsilon n^2) \quad &\leq \quad \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2) \\
&\leq \quad \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \frac{2S^2\epsilon^{-2}}{n^3} \\
&\leq \quad (2n)\frac{2S^2\epsilon^{-2}}{n^3} = \frac{4S^2\epsilon^{-2}}{n^2}
\end{aligned}$$

Comme précédemment, le lemme de Borel-Cantelli et le critère fondamental de convergence presque sûre entraîne alors que $(\frac{V_n}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

7. Posons $M_n = \max\{\frac{|U_k|}{k} : n^2 \leq k < (n+1)^2\}$ Soit $n \geq 1$ et k un entier avec $n^2 \leq k < (n+1)^2$: on a

$$\frac{|U_k|}{k} \leq \frac{|U_k|}{n^2} \leq \frac{|U_{n^2}| + |U_{n^2} - U_k|}{n^2} = \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{|U_{n^2} - U_k|}{n^2} \leq \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{V_n}{n^2}$$

En passant au max en k, on obtient

$$M_n \leq \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{V_n}{n^2}.$$

D'après les questions précédentes, cela entraîne que M_n tend presque sûrement vers 0. Mais pour tous les ω tels que $M_n(\omega)$ tend vers 0 $\frac{U_k(\omega)}{k}$ tend vers 0. En effet, soit $\epsilon > 0$: il existe $n_0 = n_0(\omega, \epsilon)$ tel que $M_n(\omega) < \epsilon$ pour $n > n_0$, et par définition de M_n, on a $\frac{|U_k|(\omega)}{k} < \epsilon$ pour $k > n_0^2$. Comme ϵ est quelconque cela entraîne que la suite $(\frac{U_k(\omega)}{k})_{k\geq 1}$ converge vers 0 pour ω dans un ensemble de probabilité 1, ce qui achève la preuve.

FIN