Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité L6MT02

Intégration, Fourier, Probabilités

Examen du 28 juin 2007

durée 2h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué de deux exercices indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

Exercice I

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle compact $[0;2]$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^3.$$

Montrer que S_n/n converge presque sûrement et déterminer sa limite. Montrer que $\frac{S_n-2n}{\sqrt{n}}$ converge en loi et déterminer sa limite.

Exercice II

$(a_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels positifs tels que $S = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |a_p| < +\infty$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi commune $\frac{1}{2}\delta_{\{-1\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{1\}}$.

1. Montrer que quels que soient les entiers relatifs i et j, on a $\mathbb{E}X_i = 0$ et $\mathbb{E}X_iX_j = \delta_{i,j}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout entier naturel N, on pose

$$Z_n^N = \sum_{|j|\leq N} a_j X_{j+n}.$$

Montrer que lorsque N tend vers l'infini, Z_n^N converge presque sûrement. On note Z_n la limite. Montrer que Z_n est bornée. Z_n admet-elle un moment d'ordre deux ?

3. Soient j et j' des entiers relatifs. Montrer que $\mathbb{E}Z_j = 0$ et que

$$\mathbb{E}Z_j Z_{j'} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i a_{i+j-j'},$$

puis que

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad \sum_{j' \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}Z_j Z_{j'}| \leq S^2.$$

4. On pose $U_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.
5. Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] = \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} \mathbb{E}Z_j Z_{j'}.$$

En déduire qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \leq Mk.$$

6. (a) Pour $\epsilon > 0$, établir la convergence de la série de terme général

$$u_n = \mathbb{P}(|U_{n^2}| > \epsilon n^2).$$

(b) Prouver que la suite $(\frac{U_{n^2}}{n^2})_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

7. On pose, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \max\{|U_k - U_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\}.$$

(a) Soit $\epsilon > 0$. Justifier l'inégalité

$$\mathbb{P}(V_n > \epsilon n^2) \leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2).$$

(b) Prouver que la suite $(\frac{V_n}{n^2})_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

8. Conclure que la suite $(\frac{U_k}{k})_{k \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

FIN