Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité L6MT02

Intégration, Fourier, Probabilités

correction de l'examen du 24 mai 2007

Exercice I

Si une variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors on a

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n),$$

soit dans ce cas précis $1 = \gamma \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$. Ainsi, seule la valeur $\gamma = \zeta(6)^{-1}$ peut convenir. Par ailleurs, si l'on pose $m = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(6)^{-1} \frac{1}{n^6} \delta_n$, il est facile de voir que m est une loi de probabilité telle que toute variable aléatoire X avec $P_X = m$ vérifie la condition donnée.

X^α est positive : avec le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}X^6 = \sum_{n=1}^{+\infty} n^6 \mathbb{P}(X = n) \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(6)^{-1} \frac{1}{n^{6-\alpha}}.$$

C'est une série de Riemann qui converge si et seulement si $6 - \alpha > 1$, soit $\alpha < 5$.

Exercice II

1. (a) Pour $x \in [0, 1[$, on a

$$\begin{aligned}
-\log(1-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&\leq x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2} \\
&\leq x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x}
\end{aligned}$$

ce qui donne la première inégalité Ensuite, pour $x \in [0, 2/3]$, il est facile de voir que $\frac{x^2}{1-x} \leq 2$, ce qui donne la deuxième inégalité.

(b) On sait que $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2 n}{(2n)!}$ D'après le critère spécial des séries alternées, on a donc $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, tout au moins dès que $\frac{x^2 n}{(2n)!} \geq \frac{x^2(n+1)}{(2(n+1))!}$ est vrai pour tout $n \geq 2$, soit si $(2n+1)(2n+2) \geq x^2$. Ceci est vérifié dès que $(2.2+1)(2.2+2) \geq x^2$, soit $|x| \leq \sqrt{30}$, ce qui est bien le cas ici. Comme $1 - x^2/2 \geq$, on a encore

$$\cos^2 x \geq (1 - x^2/2)^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} \geq = 1 - x^2.$$

Maintenant, comme $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $x^2 \leq \frac{\pi^2}{16} \leq \frac{2}{3}$ et on peut appliquer la question précédente qui nous dit que $-\log(1 - x^2) \leq 2x^2$, soit $1 - x^2 \geq e^{-2x^2}$.

(c) Pour x entre 0 et $\pi/4$, on a $\cos^2 x \geq e^{-2x^2}$, et donc $\cos^{2n} x \geq e^{-2nx^2}$. En intégrant, il vient Monrtrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int_0^{\pi/4} \cos^{2n} x \, dx \geq \int_0^{\pi/4} e^{-2nx^2} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-2nx^2} \, dx - \int_{\pi/4}^{+\infty} e^{-2nx^2}.$$

Faisons le changement de variable $y = \sqrt{n}x$: il vient

$$\int_0^{\pi/4} e^{-2nx^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}\pi/4} e^{-2y^2} \, dy \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi/4} e^{-2y^2} \, dy.$$

Ainsi, pour $C = \int_0^{\pi/4} e^{-2y^2} \, dy$, on a bien

$$\forall n \geq 1 \quad \int_0^{\pi/4} \cos^{2n} x \, dx \geq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

2. Pour tout entier n on définit la fonction $g_n(x) = \cos^{2n} x \, \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]}(x)$. On pose $a_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n(x) \, dx$ et $k_n = a_n^{-1} g_n$.

(a) Soit $\delta \in]0, \pi/4[$ et $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la convolution

$$f * k_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) k_n(t) \, d\lambda(t)$$

Mais, par construction

$$1 = \int_{\mathbb{R}} k_n(t) \, d\lambda(t),$$

soit

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) k_n(t) \, d\lambda(t),$$

d'où

$$f * k_n(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(f(x-t) - f(x)\right) k_n(t)\ d\lambda(t).$$

Il vient

$$\begin{aligned}
f * k_n(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(f(x-t) - f(x)\right) k_n(t)\ d\lambda(t) \\
&= \int_{[-\delta,\delta]} \left(f(x-t) - f(x)\right) k_n(t)\ d\lambda(t) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} \left(f(x-t) - f(x)\right) k_n(t)\ d\lambda(t) \\
&\leq \int_{[-\delta,\delta]} |f(x-t) - f(x)| k_n(t)\ d\lambda(t) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} |f(x-t) - f(x)| k_n(t)\ d\lambda(t) \\
&\leq \int_{[-\delta,\delta]} \omega_f(\delta) k_n(t)\ d\lambda(t) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} 2\|f\|_\infty k_n(t)\ d\lambda(t)
\end{aligned}$$

On a d'une part

$$\int_{[-\delta,\delta]} \omega_f(\delta) k_n(t)\ d\lambda(t) \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_f(\delta) k_n(t)\ d\lambda(t) = \omega_f(\delta).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} 2\|f\|_\infty k_n(t)\ d\lambda(t) &= 4\|f\|_\infty \int_\delta^{\pi/4} k_n(t)\ dt \\
&= \frac{4\|f\|_\infty}{a_n} \int_\delta^{\pi/4} \cos^{2n} t\ dt \\
&\leq \frac{4\|f\|_\infty}{a_n} \int_\delta^{\pi/4} \cos^{2n} \delta\ dt \\
&\leq \frac{4\|f\|_\infty}{a_n} \cos^{2n} \delta (\frac{\pi}{4} - \delta) \\
&\leq \frac{\pi\|f\|_\infty}{a_n} \cos^{2n} \delta
\end{aligned}$$

D'où finalemnt l'inégalité

$$|f * k_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi \cos^{2n} \delta}{a_n} \|f\|_\infty + \omega_f(\delta).$$

En passant au sup en x, il vient

$$\|f * k_n - f\|_\infty \leq \frac{\pi \cos^{2n} \delta}{a_n} \|f\|_\infty + \omega_f(\delta).$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que $\omega_f(\delta) \leq \epsilon/2$. Maintenant

$$\frac{\pi \cos^{2n} \delta}{a_n} \|f\|_\infty \leq \frac{\pi \|f\|_\infty}{C} \sqrt{n} (cos^2 \delta)^n,$$

qui, par croissance comparées, converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, on peut trouver n_0 tel que $\frac{\pi \cos^{2n} \delta}{a_n} \|f\|_\infty \leq \epsilon/2$ pour $n \geq n_0$, d'où $\|f * k_n - f\|_\infty \leq \epsilon$ pour $n \geq n_0$: on a bien montré que $f * k_n$ converge uniformément vers f.

(b) Soit $x \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$. Comme f est à support dans $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$, on a

$$\begin{aligned} f * k_n(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) k_n(x-t) \, d\lambda(t) \\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} f(t) k_n(x-t) \, dt \\ &= \frac{1}{a_n} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} f(t) \cos^{2n}(x-t) \mathbb{1}_{[-\pi/4, \pi/4]}(x-t) \, dt \end{aligned}$$

Mais comme $|x|$ et $|t|$ ne dépassent pas $\pi/8$, $x - t \in [-\pi/4, \pi/4]$, d'où

$$f * k_n(x) = \frac{1}{a_n} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \cos^{2n}(x-t) f(t) \, dt.$$

On a

$$\begin{aligned} \cos^{2n}(x-t) &= \cos(x-t)^{2n} \\ &= (\cos x \cos t + \sin x \sin t)^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\cos x \cos t)^k (\sin x \sin t)^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left((\sin t)^{2n-t} (\cos t)^k \right) \left((\sin x)^{2n-k} (\cos x)^k \right) \end{aligned}$$

D'où

$$f * k_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} c_{n,k}(f) \left((\sin x)^{2n-k} (\cos x)^k \right),$$

avec

$$c_{n,k}(f) = \frac{1}{a_n} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left((\sin t)^{2n-t} (\cos t)^k\right) f(t)\ dt,$$

soit $(f * k_n)(x) = P_n(\cos x, \sin x)$, où l'on a posé

$$P_n[X, Y] = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} c_{n,k}(f) X^k Y^{2n-k}.$$

Il n'y a pas unicité d'un tel polynôme : par exemple $P_n + (X^2 + Y^2 - 1)$ convient aussi.

(c) Il suffit de remarquer qu'une fonction continue sur $[-1/4, 1/4]$ peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$ et à support dans $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$, puis d'appliquer les questions précédentes à $\tilde{f}$.

Exercice III

1. $U_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j$ et $U_{n+k} = \sum_{j=1}^{n+k} Z_j$, donc $U_{n+k} - U_n = \sum_{j=n+1}^{n+k} Z_j$, puis

$$(U_{n+k} - U_n)^2 = \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} Z_j Z_{j'},$$

d'où

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] = \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} \mathbb{E} Z_j Z_{j'}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] &\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} |\mathbb{E} Z_j Z_{j'}| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} \gamma_{j-j'} \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j' \in \mathbb{Z}} \gamma_{j-j'} \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} M \\
&\leq Mk,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $M = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \gamma_p < +\infty$. On remarque qu'en particulier $\mathbb{E} U_k^2 = \mathbb{E}(U_k - U_0)^2 \leq Mk$.

2. (a) En utilisant l'inégalité de Markov, on a

$$u_n = \mathbb{P}(|U_{n^2}| > \epsilon n^2) \leq \mathbb{P}(U_{n^2}^2 > \epsilon^2 n^4) \leq \frac{\mathbb{E}U_{n^2}^2}{\epsilon^2 n^4} \leq \frac{Mn^2}{\epsilon^2 n^4} = \frac{M\epsilon^{-2}}{n^2}$$

ce qui assure la convergence de la série

(b) Soit $\epsilon > 0$. Comme la série de terme général $\mathbb{P}(|U_{n^2}| > \epsilon n^2) = \mathbb{P}(\frac{|U_{n^2}|}{n^2} > \epsilon n^2)$ converge, le lemme de Borel-Cantelli assure que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty}\{\frac{|U_{n^2}|}{n^2} > \epsilon n^2\}) = 0.$$

Comme ϵ est quelconque, le critère fondamental de convergence presque sûre entraîne que la suite $(\frac{U_{n^2}}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

3. On pose, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \max\{|U_k - U_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\}.$$

(a) Soit $\epsilon > 0$. Par définition de V_n, on a

$$\{V_n > \epsilon n^2\} \quad = \quad \cup_{n^2<k<(n+1)^2}\{|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2\}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_n > \epsilon n^2) \quad &\leq \quad \sum_{n^2<k<(n+1)^2} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2) \\ &= \quad \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2).\end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 1$ et k entre n^2+1 et $(n+1)^2-1$: on peut écrire $k = n^2+l$, avec $l \in \{1, \ldots, 2n\}$. On a

$$\mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2) = \mathbb{P}((U_k - U_{n^2})^2 > \epsilon^2 n^4) \leq \frac{\mathbb{E}(U_{n^2} - U_k)^2}{\epsilon^2 n^4} \leq \frac{Ml}{\epsilon^2 n^4} \leq \frac{2M\epsilon^{-2}}{n^3},$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_n > \epsilon n^2) \quad &\leq \quad \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2) \\ &\leq \quad \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \frac{2M\epsilon^{-2}}{n^3} \\ &\leq \quad (2n)\frac{2M\epsilon^{-2}}{n^3} = \frac{4M\epsilon^{-2}}{n^2}\end{aligned}$$

Comme précédemment, le lemme de Borel-Cantelli et le critère fondamental de convergence presque sûre entraîne alors que $(\frac{V_n}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

4. Posons $M_n = \max\{\frac{|U_k|}{k} : n^2 \leq k < (n+1)^2\}$ Soit $n \geq 1$ et k un entier avec $n^2 \leq k < (n+1)^2$: on a

$$\frac{|U_k|}{k} \leq \frac{|U_k|}{n^2} \leq \frac{|U_{n^2}| + |U_{n^2} - U_k|}{n^2} = \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{|U_{n^2} - U_k|}{n^2} \leq \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{V_n}{n^2}$$

En passant au max en k, on obtient

$$M_n \leq \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{V_n}{n^2}.$$

D'après les questions précédentes, cela entraîne que M_n tend presque sûrement vers 0. Mais pour tous les ω tels que $M_n(\omega)$ tend vers 0 $\frac{U_k(\omega)}{k}$ tend vers 0. En effet, soit $\epsilon > 0$: il existe $n_0 = n_0(\omega, \epsilon)$ tel que $M_n(\omega) < \epsilon$ pour $n > n_0$, et par définition de M_n, on a $\frac{|U_k|(\omega)}{k} < \epsilon$ pour $k > n_0^2$. Comme ϵ est quelconque cela entraîne que la suite $(\frac{U_k(\omega)}{k})_{k \geq 1}$ converge vers 0 pour ω dans un ensemble de probabilité 1, ce qui achève la preuve.

FIN