Unité L6MT02

Intégration, Fourier, Probabilités

Examen du 24 mai 2007

durée 3h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

Exercice I

Montrer qu'il existe une unique constante γ telle qu'on puisse construire une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X = n) = \gamma \frac{1}{n^6}.$$

Soit X une telle variable aléatoire et α un réel. Déterminer pour quelles valeurs de α la variable X^α est intégrable.

Exercice II

1. Inégalités
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 2/3]$, on a

   $$-\log(1-x) \leq x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x} \leq 2x.$$

   Indication : on pourra effectuer un développement en série.

   (b) Montrer que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, on a

   $$\cos^2 x \geq 1 - x^2 \geq e^{-2x^2}.$$

   (On pourra admettre que $\frac{\pi^2}{16} \leq \frac{2}{3}$.)

   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

   $$\int_0^{\pi/4} \cos^{2n} x \, dx \geq \int_0^{+\infty} e^{-2nx^2} \, dx - \int_{\pi/4}^{+\infty} e^{-2nx^2} \, dx.$$

En déduire l'existence d'une constante C telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \int_0^{\pi/4} \cos^{2n} x \; dx \geq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

2. Pour tout entier n on définit la fonction $g_n(x) = \cos^{2n} x \, \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]}(x)$. On pose $a_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, dx$ et $k_n = a_n^{-1} g_n$.
   (a) Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée. Montrer que pour tout $\delta \in]0, \pi/4[$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$|f * k_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi \cos^{2n} \delta}{a_n} \|f\|_\infty + \omega_f(\delta),$$

   où $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; |x - y| \leq \delta\}$ et

   $$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}.$$

   En déduire que $f * k_n$ converge uniformément vers f.
   (b) Soit f une fonction continue à support dans $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$. Montrer que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$

   $$f * k_n(x) = \frac{1}{a_n} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \cos^{2n}(x - t) f(t) \; dt,$$

   puis qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que

   $$\forall x \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}] \quad (f * k_n)(x) = P_n(\cos x, \sin x).$$

   Y a-t-il unicité d'un tel polynôme ?
   (c) Soit f une fonction continue sur $[-1/4, 1/4]$. Montrer qu'il existe une suite P_n d'éléments de $\mathbb{R}[X, Y]$ tels que

   $$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [-1/4, 1/4]} |f(x) - P_n(\cos x, \sin x)| = 0.$$

Exercice III

$(\gamma_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est une suite de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{Z}} \gamma_p < +\infty$. Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de carrés intégrables telles que, quels que soient les entiers naturels i et j, on ait

$$\mathbb{E}[Z_i] = 0, \quad \mathbb{E}|Z_i Z_j| \leq \gamma_{i-j}.$$

On pose $U_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \sum_{j=n+1}^{n+k} \gamma_{i-j}.$$

   En déduire qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \leq Mk.$$

2. (a) Pour $\epsilon > 0$, établir la convergence de la série de terme général

$$u_n = \mathbb{P}(|U_{n^2}| > \epsilon n^2).$$

   (b) Prouver que la suite $(\frac{U_{n^2}}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

3. On pose, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \max\{|U_k - U_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\}.$$

   (a) Soit $\epsilon > 0$. Justifier l'inégalité

$$\mathbb{P}(V_n > \epsilon n^2) \leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2).$$

   (b) Prouver que la suite $(\frac{V_n}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

4. Conclure que la suite $(\frac{U_k}{k})_{k\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

FIN