**Université d'Orléans** **Licence de Mathématiques**

Unité IFP

**Intégration, Fourier, Probabilités**

corrigé du devoir surveillé du 7 mars 2007

# Exercice I

1. Notons $\theta(x,y)=(y,x)$ et montrons que
$$\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{F}; A=\theta^{-1}(A)\}.$$
Notons
$$\mathcal{A}'=\{A\in\mathcal{F}; A=\theta^{-1}(A)\}.$$
et soit $A\in\mathcal{A}'$. On veut montrer que $(x,y)\in A \iff (y,x)\in A$. Soit $(x,y)\in A$. $\theta^{-1}(\{(x,y)\})=\{(y,x)\}\subset\theta^{-1}(A)$ Mais comme $A\in\mathcal{A}'$, $\theta^{-1}(A)=A$, donc $(y,x)\in A$. Comme les rôles de $x$ et $y$ sont interchangeables, on a bien $(x,y)\in A \iff (y,x)\in A$, donc $A\in\mathcal{A}$, et finalement $\mathcal{A}'\subset\mathcal{A}$. Réciproquement, soit $A\in\mathcal{A}$. $\theta$ est une involution, donc une bijection, avec en particulier $\theta^{-1}(A)=\theta(A)$. Ainsi, pour montrer que $\theta^{-1}(A)=A$, il suffit de montrer que $\theta(A)\subset A$, ce qui est évident d'après la définition de $\mathcal{A}$
A l'aide de cette caractérisation, il nous reste maintenant à faire les vérifications habituelles.
   - $\varnothing\in\mathcal{A}$ car $\theta^{-1}(\varnothing)=\varnothing$.
   - Soit $A\in\mathcal{A}$ : $\theta^{-1}(A^c)=(\theta^{-1}(A))^c=A^c$, donc $A\in\mathcal{A}$.
   - Soit $(A_n)_{n\ge1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On a $\theta^{-1}(\cup_{n\ge1}A_n)=\cup_{n\ge1}\theta^{-1}(A_n)=\cup_{n\ge1}A_n$, donc $\cup_{n\ge1}A_n\in\mathcal{A}$.
2. Soit $B$ un borélien de $\mathbb{R}$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Comme $S$ est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, elle est borélienne, donc $S^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. Comme $S(x,y)=x+y=y+x=S(y,x)$, on a
$$(x,y)\in S^{-1}(B) \iff S(x,y)\in B \iff S(y,x)\in B \iff (y,x)\in S^{-1}(B),$$
ce qui montre que $S^{-1}(B)\in\mathcal{A}$. Comme $B$ est un borélien quelconque, il s'ensuit que $S$ est $(\Omega,\mathcal{A})-(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.
Comme $P(x,y)=xy=yx=P(y,x)$ et que $P$ est continue, le même raisonnement vaut aussi pour $P$.
3. A l'évidence, $S$ est $(\Omega,\sigma(S))-(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Comme $\sigma(S)$ est une sous-tribu de $\mathcal{G}$, $S$ est $(\Omega,\mathcal{G})-(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. De la même

manière, $P$ est $(\Omega,\mathcal{G})-(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Maintenant, comme chacune des composantes de $V$ est $(\Omega,\mathcal{G})-(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, $V$ est $(\Omega,\mathcal{G})-(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ mesurable.

4. Définissons $F$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$F(s,p)=\begin{cases}(\frac{-s+\sqrt{s^2-4p}}{2},\frac{-s-\sqrt{s^2-4p}}{2}) & \text{si } s^2>4p\\ (-\frac{s}{2},-\frac{s}{2}) & \text{sinon.}\end{cases}$$

$F$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même ; en particulier, elle est donc $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))-(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ mesurable. Il est facile de voir que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\quad F(V(x,y))=(\max(x,y),\min(x,y)).$$

Ainsi, $F(V(x,y))\in\{(x,y),(y,x)\}$. Ainsi, pour $A\in\mathcal{A}$, on a $(x,y)\in A\iff F(V(x,y))\in A$, ce qui signifie que $1\!\!1_A(x,y)=1\!\!1_A(F(V(x,y)))$, autrement dit que $1\!\!1_A=1\!\!1_A\circ F\circ V$. Ainsi, $1\!\!1_A$, est la composée de $V$, qui est $(\Omega,\mathcal{G})-(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ mesurable, de F qui est $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))-(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, et de $1\!\!1_A$, qui est $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))-(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable (car $A$ est un borélier de $\mathbb{R}^2$) : finalement, $1\!\!1_A$ est $(\Omega,\mathcal{G})-(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ mesurable, et donc $A=1\!\!1_A^{-1}(\{1\})\in\mathcal{G}$, ce qui montre que $\mathcal{A}\subset\mathcal{G}$.
Inversement, comme $S$ et $P$ sont $(\Omega,\mathcal{A})-(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables, on a $\mathcal{G}=\sigma(S,P)=S^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\wedge S^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\subset\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}=\mathcal{A}$.

# Exercice II

$Y$ est intégrable si et seulement si $\mathbb{E}|Y|=\mathbb{E}\exp(\alpha X)$ est fini. D'après le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y| &= \sum_{k=1}^{+\infty}e^{\alpha k}P(X=k) &&= \sum_{k=1}^{+\infty}e^{\alpha k}p(1-p)^{k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}e^{\alpha(k+1)}p(1-p)^k &&= e^{\alpha}p\sum_{k=0}^{+\infty}(e^{\alpha}(1-p))^k\end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique : elle est convergente si et seulement si $|e^{\alpha}(1-p)|<1$, on de manière équivalente $\alpha<-\log(1-p)$. Dans ce cas, on a, toujours d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k e^{\alpha k}P(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k e^{\alpha k}p(1-p)^{k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}e^{\alpha(k+1)}p(1-p)^k=-e^{\alpha}p\sum_{k=0}^{+\infty}(-e^{\alpha}(1-p))^k\\ &= -e^{\alpha}p\frac{1}{1+e^{\alpha}(1-p)}=-\frac{p}{1-p+e^{-\alpha}}\end{aligned}$$

# Problème

## Partie I

1. Soient $i, j$ deux entiers naturels. Si $i = j$, il n'y a rien à montrer. Sinon, pour fixer les idées, on suppose que $i < j$.

$$\begin{aligned} f(j) - f(i) &= \sum_{k=i}^{j-1} f(k+1) - f(k) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} (\Delta f)(k) \end{aligned}$$

   D'où

$$\begin{aligned} |f(j) - f(i)| &\leq \sum_{k=i}^{j-1} |(\Delta f)(k)| \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \|\Delta f\|_\infty = |i-j| \|\Delta f\|_\infty \end{aligned}$$

2. Le système (1) peut se réécrire sous la forme équivalente

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall i \in \mathbb{N} \quad g(i+1) = \frac{ig(i) + f(i) - \mathcal{P}_\lambda(f)}{\lambda} \end{cases}$$

   qui, à l'évidence, définit de manière unique par récurrence la solution du problème posé.

## Partie II

1. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (p_k \mathbb{E}h(W+1) - \mathbb{E}Y_k h(W)) &= (\sum_{k=1}^{n} p_k) \mathbb{E}h(W+1) - \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} Y_k) h(W) \\ &= \lambda \mathbb{E}h(W+1) - \mathbb{E}W h(W) \\ &= \mathbb{E}\lambda h(W+1) - W h(W) \end{aligned}$$

2. $Y_k h(W)$ est integrable car $|Y_k h(W)| \leq 1.\|h\|_\infty$. Notons $\Omega_i = \{W = i\}$.

Les $(\Omega_i)_{i\geq 0}$ forment une partition de $\Omega$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y_k h(W) &= \int_\Omega Y_k h(W)\ d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{\Omega_i} Y_k h(W)\ d\mathbb{P} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{\Omega_i} Y_k h(i)\ d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\Omega 1\!\!1_{\{W=i\}} Y_k h(i)\ d\mathbb{P} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\Omega 1\!\!1_{\{W=i\}\cap\{Y_k=1\}} h(i)\ d\mathbb{P} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} h(i) P(\{W=i\}\cap\{Y_k=1\}) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} h(i) P(W=i|Y_k=1)P(Y_k=1) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} h(i) P(V_k+1=i) p_k \\
&= \mathbb{E}h(V_k+1)p_k,
\end{aligned}$$

où la dernière ligne provient du théorème de transfert pour les fonctions d'une variable aléatoires discrètes ($V_k+1$ est une variable aléatoire discrète et $h(V_k+1)$ est intégrable car $|h(V_k+1)| \leq \|h\|_\infty$).

3.

$$\mathbb{E}\lambda h(W+1) - Wh(W) = \sum_{k=1}^{n} (p_k \mathbb{E}h(W+1) - \mathbb{E}Y_k h(W))$$

Soit $k$ entre 1 et $n$ : comme $W$ et $U_k$ ont même loi, le théorème de transfert nous dit que $\mathbb{E}h(W+1) = \mathbb{E}h(U_k+1)$. On joignant ceci à la question précédente, on a

$$p_k\mathbb{E}h(W+1) - \mathbb{E}Y_k h(W) = p_k\mathbb{E}h(U_k+1) - p_k h(V_{k+1}) = p_k(h(U_k+1) - h(V_k+1))$$

Finalement, on a

$$\mathbb{E}\lambda h(W+1) - Wh(W) = \sum_{k=1}^{n} p_k(h(U_k+1) - h(V_k+1))$$

4. D'après la question I.1, on a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}\lambda h(W+1) - Wh(W)| &\leq \sum_{k=1}^{n} p_k |h(U_k+1) - h(V_k+1)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} p_k |\|h\|_\infty |U_k - V_k| \\
&\leq \|h\|_\infty \sum_{k=1}^{n} p_k \mathbb{E}|U_k - V_k|
\end{aligned}$$

5. Soit $h = S_\lambda 1\!\!1_A$. Par définition de $S_\lambda$, on a

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \lambda h(i+1) - ih(i) = 1\!\!1_A(i) - \mathcal{P}_\lambda(1\!\!1_A).$$

On en déduit que

$$\lambda h(W+1) - Wh(W) = 1\!\!1_A(W) - \mathcal{P}_\lambda(1\!\!1_A).$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}1\!\!1_A(W) - \mathcal{P}_\lambda(1\!\!1_A)| &= |\mathbb{E}\lambda h(W+1) - Wh(W)| \\
&\leq \|h\|_\infty \sum_{k=1}^n p_k \mathbb{E}|U_k - V_k| \\
&= \|S_\lambda 1\!\!1_A\|_\infty \sum_{k=1}^n p_k \mathbb{E}|U_k - V_k| \\
&\leq \frac{1}{\max(1,\lambda)} \|1\!\!1_A\|_\infty \sum_{k=1}^n p_k \mathbb{E}|U_k - V_k| \\
&\leq \frac{1}{\max(1,\lambda)} \sum_{k=1}^n p_k \mathbb{E}|U_k - V_k|.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}1\!\!1_A(W) - \mathcal{P}_\lambda(1\!\!1_A) = P(W \in A) - \mathcal{P}_\lambda(A)$, on a bien finalement

$$|P(W \in A) - \mathcal{P}_\lambda(A)| \leq \frac{1}{\max(1,\lambda)} \sum_{k=1}^n p_k \mathbb{E}|U_k - V_k|.$$

## Partie III

1. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Comme $U_k = W$, on a évidemment $P_{U_k} = P_W$.

   $$\mathbb{P}(\{W = i\} \cap \{Y_k = 1\}) = \mathbb{P}(\{V_k + Y_k = i\} \cap \{Y_k = 1\}) = \mathbb{P}(\{V_k + 1 = i\} \cap \{Y_k = 1\}).$$

   $V_k = \sum_{i \neq k} Y_i$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les $(Y_i)_{1 \leq i \leq n; i \neq k}$. Comme les $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes, le théorème d'associativité de l'indépendance nous dit que $V_k$ est indépendant de $Y_k$ : on a donc

   $$\mathbb{P}(\{W = i\} \cap \{Y_k = 1\}) = \mathbb{P}(\{V_k + 1 = i\} \cap \{Y_k = 1\}) = P(V_k + 1 = i)P(Y_k = 1),$$

   d'où $P(W = i | Y_k = 1) = P(V_k + 1 = i)$.
2. On peut donc appliquer le résultat de la partie II. Ici, $\mathbb{E}|U_k - V_k| = \mathbb{E}Y_k = p_k$, d'où

   $$|P(W \in A) - \mathcal{P}_\lambda(A)| \leq \frac{1}{\max(1,\lambda)} \sum_{k=1}^n p_k^2$$

Ensuite, on a

$$\frac{1}{\max(1,\lambda)}\sum_{k=1}^n p_k^2 \le \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^n p_k^2 \le \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^n p_k\|p\|_\infty = \|p\|_\infty.$$

3. Soit $A \subset \mathbb{N}$. On a

$$0 = 1 - 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu(n) - \nu(n)).$$

Donc

$$\sum_{n\in A} (\mu(n) - \nu(n)) + \sum_{n\in A^c} (\mu(n) - \nu(n)) = 0,$$

soit

$$\sum_{n\in A} (\mu(n) - \nu(n)) = -\sum_{n\in A^c} (\mu(n) - \nu(n)),$$

d'où

$$\mu(A)-\nu(A) = \sum_{n\in A} (\mu(n)-\nu(n)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in A} (\mu(n) - \nu(n)) + \sum_{n\in A^c} (\nu(n) - \mu(n))\right).$$

On en déduit

$$|\mu(A)-\nu(A)| \le \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in A} |\mu(n) - \nu(n)| + \sum_{n\in A^c} |\nu(n) - \mu(n)|\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(n)-\nu(n)| = d(\mu,\nu)/2.$$

En prenant le sup, on en déduit $d(\mu,\nu) \ge 2\sup\{|\mu(A) - \nu(A)|; A \subset \mathbb{N}\}$.
Mais en réalité l'égalité est atteinte :
si l'on prend $A = \{n \in \mathbb{N}; \mu(n) - \nu(n) \ge 0\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(A) - \nu(A) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in A} (\mu(n) - \nu(n)) + \sum_{n\in A^c} (\nu(n) - \mu(n))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in A} |\mu(n) - \nu(n)| + \sum_{n\in A^c} |\mu(n) - \nu(n)|\right) \\
&= d(\mu,\nu)/2,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat voulu.

4. Il suffit de prendre $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $\lambda/n$. A ce moment là, $W$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$. On applique alors la question précédente et le théorème de Le Cam pour conclure.

**FIN**