Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité L6MT02

Intégration, Fourier, Probabilités

Devoir surveillé du 7 mars 2007

durée 3h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué d'un problème et de deux exercices indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

Exercice I

On pose $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et on note

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{F}; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \in A \iff (y,x) \in A\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.
2. On définit les applications S et P sur Ω par $S(x,y) = x+y$ et $P(x,y) = xy$. Montrer que S et P sont $(\Omega, \mathcal{A}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables.
3. On note $\mathcal{G} = \sigma(S,P)$ et $V = (S,P)$. Montrer que le vecteur V est $(\Omega, \mathcal{G}) - (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ mesurable.
4. Soit $A \in \mathcal{A}$. Déterminer une application F de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $1\!\!1_A = 1\!\!1_A \circ F \circ V$, puis montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{G}$.

Exercice II

Soit $p \in]0,1[$, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $Y = (-1)^X \exp(\alpha X)$. Déterminer une condition nécessaire liant α et p pour que Y soit intégrable. Dans ce cas, calculer $\mathbb{E}Y$.

Problème

Le but de ce problème est de montrer que la loi du nombre d'apparitions dans une série d'événements rares (c'est à dire de faible probabilité) peut être bien approché par une loi de Poisson.
Dans la première partie, on pose quelques préliminaires d'analyse qui seront utiles par la suite. La deuxième partie, qui est le centre du problème montre comment un procédé particulier (appelé méthode de Chen-Stein) peut permettre l'approximation demandée, sans qu'il soit nécessaire que les événements considérés dont indépendants. Enfin, la troisième partie permet la mise en oeuvre concrète de cette méthode dans le cas où les événements sont indépendants. Ce dernier résultat est connu sous le nom de théorème de Le Cam.

Notations
Pour toute fonction f bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|$. On note également Δf la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n).$$

Pour $\lambda > 0$, on note $\mathcal{P}_\lambda$ la mesure de Poisson de paramètre λ.
Pour f bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, on notera

$$\mathcal{P}_\lambda(f) = \int f \; d\mathcal{P}_\lambda = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} f(k).$$

Ainsi, pour $A \subset N$, on a la relation $\mathcal{P}_\lambda(A) = \mathcal{P}_\lambda(\mathbb{1}_A)$.

Toutes les variables aléatoires considérées ici vivent sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour X variable aléatoire sur cet espace, on note $\mathbb{P}_X$ la loi de X sous $\mathbb{P}$. Comme d'habitude, le symbole $\mathbb{E}$ représente l'intégrale par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Partie I

1. Montrer que pour tout couple (i, j) d'entiers, on a

$$|f(i) - f(j)| \leq \|\Delta f\|_\infty |i - j|.$$

2. Soient $\lambda > 0$ et f une fonction f bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall i \in \mathbb{N} \quad \lambda g(i+1) - i g(i) = f(i) - \mathcal{P}_\lambda(f) \end{cases} \tag{1}$$

On notera $S_\lambda f$ cette fonction. Dans la suite, on admettra que $g = S_\lambda f$ est bornée, avec

$$\|\Delta S_\lambda f\|_\infty \leq \frac{1}{\max(1, \lambda)} \|f\|_\infty. \tag{2}$$

Partie II

Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires de Bernoulli, avec $Y_k \sim \mathrm{Ber}(p_k)$. On pose

$$W = \sum_{k=1}^{n} Y_k \text{ et } \lambda = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

On suppose qu'ont pu être construites des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ et $V_1, \ldots, V_n$ avec

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \mathbb{P}_{U_k} = \mathbb{P}_W \\ \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \forall \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(W = i | Y_k = 1) = \mathbb{P}(V_k + 1 = i) \end{cases} \tag{3}$$

1. Soit h une fonction bornée sur $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\lambda h(W+1) - Wh(W) = \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \mathbb{E}h(W+1) - \mathbb{E}Y_k h(W)\right).$$

2. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathbb{E}Y_k h(W) = p_k \mathbb{E}h(V_k + 1)$.
3. Montrer que $\mathbb{E}\lambda h(W+1) - Wh(W) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k \mathbb{E}\left(h(U_k+1) - h(V_k+1)\right)$.
4. En déduire que

$$|\mathbb{E}\lambda h(W+1) - Wh(W)| \leq \|\Delta h\|_\infty \sum_{k=1}^{n} p_k \mathbb{E}|U_k - V_k|.$$

5. Soit $A \subset \mathbb{N}$. Montrer que

$$|\mathbb{P}(W \in A) - \mathcal{P}_\lambda(A)| \leq \frac{1}{\max(1, \lambda)} \sum_{k=1}^{n} p_k \mathbb{E}|U_k - V_k|.$$

   Indication : on pourra prendre $h = S_\lambda \mathbb{1}_A$.

Partie III

On conserve les mêmes notations que dans la question précédente, mais l'on suppose en plus que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes.

1. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $U_k = W$ ainsi que $V_k = W - Y_k$. Montrer que les hypothèses de (3) sont vérifiées.
2. En déduire que pour tout $A \subset \mathbb{N}$, on a

$$|\mathbb{P}(W \in A) - \mathcal{P}_\lambda(A)| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} p_k^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} p_k.$$

   Ce résultat est le théorème de Le Cam.

 Tournez la page S.V.P.

3. Pour μ et ν mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$, on note
$$d(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(n) - \nu(n)|.$$
Montrer que $d(\mu, \nu) = 2 \sup\{|\mu(A) - \nu(A)|; A \subset \mathbb{N}\}$.
4. Soit $\lambda > 0$ et n un entier naturel non nul. Montrer que
$$d(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}_\lambda)) \leq \frac{2\lambda}{n}.$$

FIN