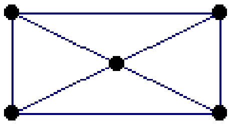
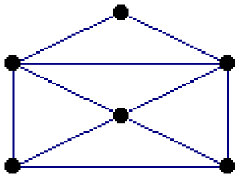
## Exemple 1 : les enveloppes

Peut-on parcourir une fois et une seule les arêtes des graphes ci-dessous sans lever le crayon ?

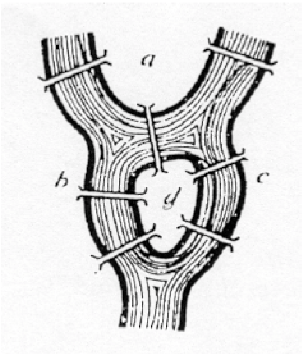


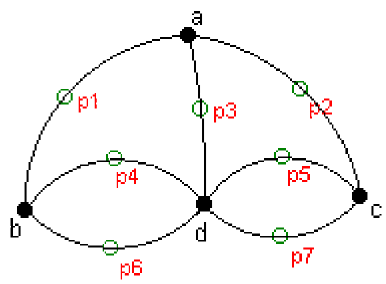


- *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; chaîne eulérienne ; théorème d'Euler.*

## Exemple 2 : les ponts de Königsberg

Au XVIIIème siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?

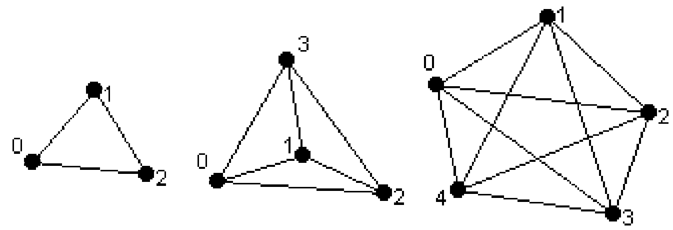



- *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; cycle eulérien.*

## Exemple 3 : dominos

Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ? On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à *n*, pour *n*=2,3,4.



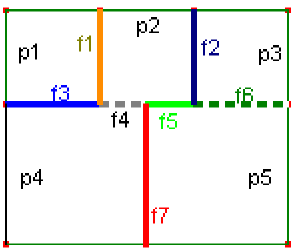

Une arête représente un domino. Il faut trouver une chaîne qui permet de parcourir toutes les arêtes une fois et une seule. On ne s'est pas occupé ici des «doubles » puisqu'on peut toujours les intercaler.

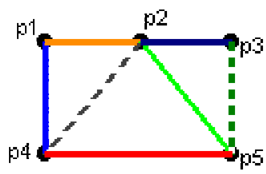
- *Contenu : graphes complets ; chaînes eulériennes ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.*

## Exemple 4 : traversée de frontières

Cinq pays sont représentés ci-contre avec leurs frontières.

Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?

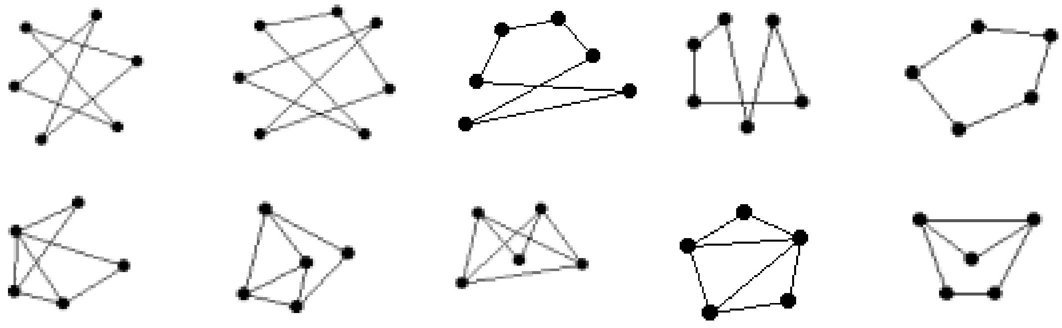



- *Contenu : chaîne eulérienne ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.*

## Exemple 5 : dessins de graphes

-Parmi les graphes ci-dessous, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.



- Peut-on dessiner des graphes simples (pas d'arêtes dont les extrémités sont confondues, et au plus une arête joignant deux sommets) dont la liste des degrés des sommets soit :

6-3-2-2-1-1-1 7-5-3-2-2-2-2-2

- *Contenu : représentations de graphes ; degrés de sommets.*

## Exemple 6 : associer un graphe à une situation

Comparer les trois graphes définis ci-dessous :

- on considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre ;

- on considère un cube ; un sommet du graphe est associé à une face du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune ;

- les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de {1,2,3,4} ; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide ;

Représenter la situation ci-dessous à l'aide d'un graphe :

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays.

- *Contenu : représentations de graphes ; sommets, sommets adjacents ; arêtes.*

## Exemple 7 : matches de football

Une ligue de football comporte 5 équipes.

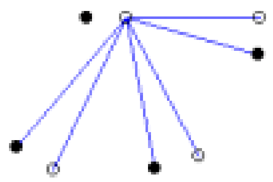
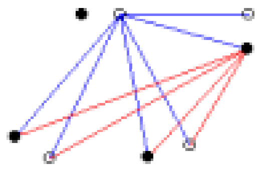
- il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois). Comment l'organiser (chacun est libre de ses règles d'organisation) ?

- le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?

- *Contenu : degré d'un sommet ; lien entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes.*

## Exemple 8 : poignées de main

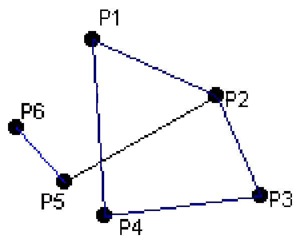
M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. Euler constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

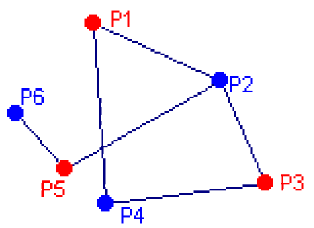
| | | | |
|---|---|---|---|
| Une personne peut serrer la main d'au plus 6 autres personnes. Pour que le nombre de poignées de mains échangées soient tous distincts, il s'agit nécessairement des nombres 6, 5, 4, 3, 2, 1 et 0. | Une personne a échangé 6 poignées de main ; c'est donc son conjoint qui n'en a échangé aucune.  | Une personne échange 5 poignées de mains ; c'est donc son conjoint qui en échange une seule.  | Une des personnes des deux couples non encore considérés échange 4 poignées de main, donc son conjoint en échange 2. Que reste-t-il pour le dernier couple ? |

- *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet.*

## Exemple 9 : transport de produits chimiques

On trouvera ci-après le graphe d'incompatibilité de six produits chimiques. Quel est le nombre minimum de wagons nécessaires à leur transport ?

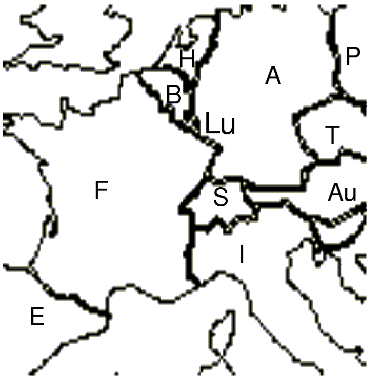


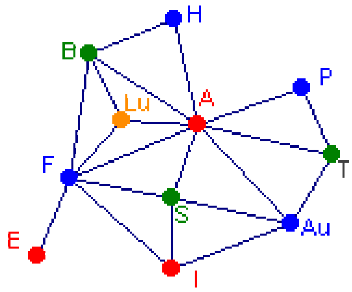



- *Contenu : nombre chromatique.*

## Exemple 10 : coloration de la carte de l'Europe

On veut colorer chaque pays de la carte ci-dessous de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur. Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent. (Deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points communs ne sont pas considérés comme voisins).



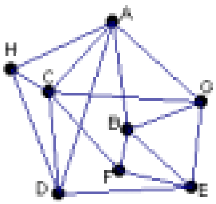

- *Contenu : sous–graphe complet ; nombre chromatique.*

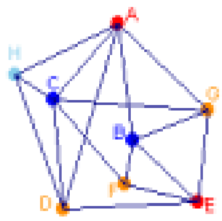
## Exemple 11 : un problème d'aquariophile

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium :

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | × | × | × | | | × | × |
| B | × | | | | × | × | × | |
| C | × | | | × | | × | × | × |
| D | × | | × | | × | | | × |
| E | | × | | × | | × | × | |
| F | | × | × | | × | | | |
| G | × | × | × | | × | | | |
| H | × | | × | × | | | | |

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?



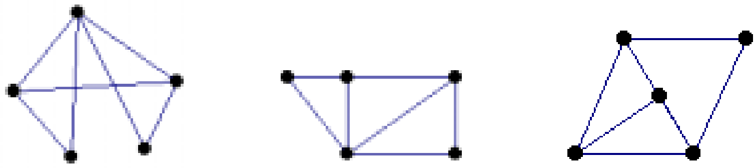

- *Contenu : matrice associée à un graphe ; sous-graphe ; graphe complet ; nombre chromatique.*

## Exemple 12 : nombre chromatique

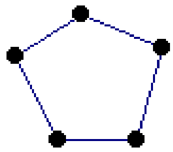
Tracer les graphes associés aux matrices ci-dessous et chercher leur nombre chromatique.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les graphes ci-dessous peuvent-ils être associés à C ?



Donner des matrices associées au graphe suivant :



Contenu : matrices et graphes associés ; nombre chromatique.

## Exemple 13 : organisation d'un examen

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, 6 matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet(I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont :

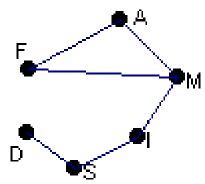
F,A,M D,S I,S I,M

1 - Quel est le nombre maximum d'épreuves qu'on peut mettre en parallèle ?

2 - Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

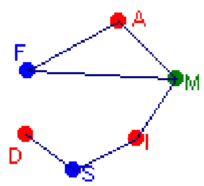
Solution

Le graphe associé à cette situation est le suivant :




1- Tout sous-graphe de plus de trois sommets comporte des arêtes ; deux sous-graphes d'ordre trois (de sommets respectivement A,D,I et F,D,I) n'ont pas d'arêtes : le nombre maximum d'épreuves en parallèle est 3.

2- Il y a un sous-graphe complet d'ordre 3 ; le nombre chromatique est au moins égal à 3 ; on voit que 3 couleurs suffisent.




- *Contenu : sous-graphes ; graphe complet ; nombre chromatique.*

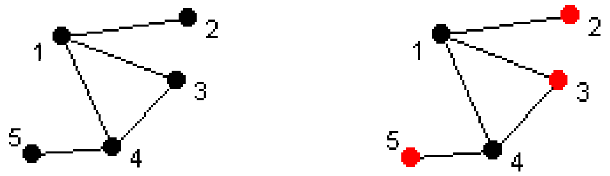
## Exemple 14 : ouverture de magasins

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4.

Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

Solution

Il n'y a qu'un seul sous-graphe a trois éléments sans arêtes ; tous les sous-graphes d'ordre 4 ou 5 ont des arêtes.




- *Contenu : sous-graphes.*

## Exemple 15 : puissances de la matrice associée à un graphe

Ci-après, la matrice M est associée à un graphe orienté G qu'on représentera.

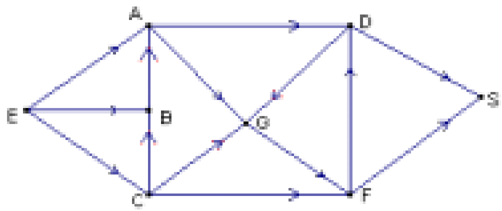
Tracer le graphe et interpréter les termes de $M^2$, puis de $M^3$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- *Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté ; longueur d'une chaîne.*

## Exemple 16 : circuits touristiques

Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4, 5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).




Les sommets étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S, on a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La première ligne de $M^3$ est : 0 1 0 0 2 2 2 2

La première ligne de $M^4$ est : 0 0 0 0 3 3 2 4

La première ligne de $M^5$ est : 0 0 0 0 3 2 3 5

La première ligne de $M^7$ est : 0 0 0 0 3 3 2 6

La première ligne de $M^8$ est : 0 0 0 0 3 2 3 5

Combien de traversée peut-on faire en 4 (resp. 5) étapes ?

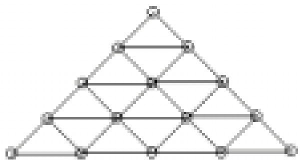
Trouver toutes les traversées possibles en 8 étapes.

- *Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté.*

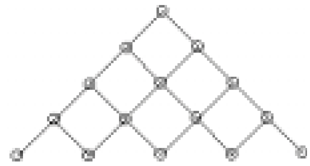
## Exemple 17 : coloration de graphes

- Montrer que le nombre chromatique du graphe (1) ci-dessous vaut 3. Pour trois couleurs données, combien y a-t-il de colorations possibles ?

- Montrer que le nombre chromatique du graphe (2) ci-dessous vaut 2.



(1)



(2)

- *Contenu : nombre chromatique, sous-graphes complets.*

## Exemple 18 : algorithme de coloration d'un graphe

Algorithme de coloration d'un graphe.

On commence par établir une liste ordonnée des sommets.

Tant qu'il reste des sommets à colorer, exécuter les actions suivantes :

- choisir une nouvelle couleur appelée couleur d'usage ;

- chercher dans la liste des sommets le premier sommet non coloré et le colorer avec la couleur d'usage ;

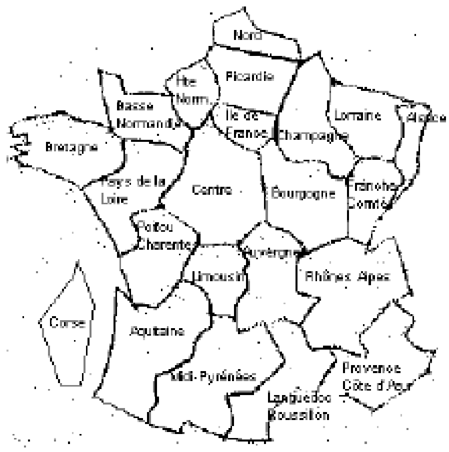
- examiner tour à tour, dans l'ordre de la liste, tous les sommets non colorés et, pour chacun d'eux, le colorer lorsqu'il n'est adjacent à aucun sommet coloré avec la couleur d'usage.

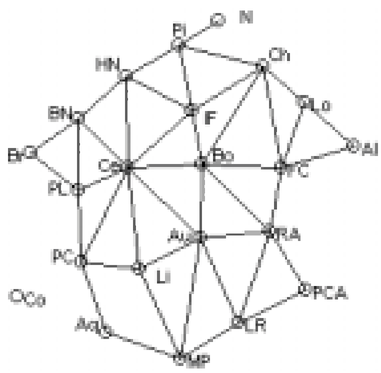
*Remarque : cet algorithme fournit un coloration, mais le nombre r de couleurs utilisées peut-être supérieur au nombre chromatique. D'où l'intérêt éventuel de comparer r à un minorant r' du nombre chromatique : si r = r', c'est le nombre chromatique.*

On veut colorer chaque région administrative française de telle sorte que deux régions voisines ne soient pas de la même couleur :

- montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs.

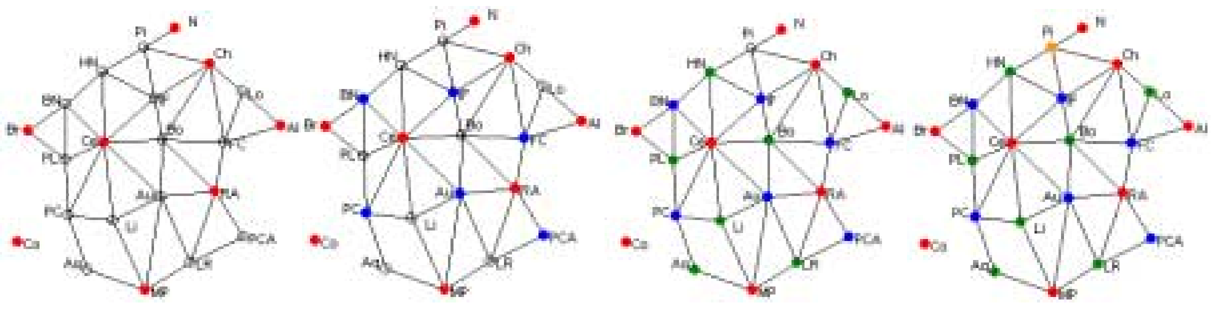
- appliquer l'algorithme ci-dessus.




Solution

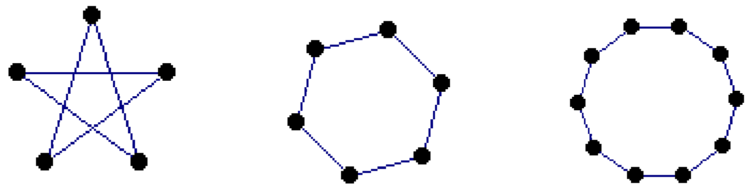
Coloration après avoir ordonné les sommets suivants l'ordre décroissant de leur degré :



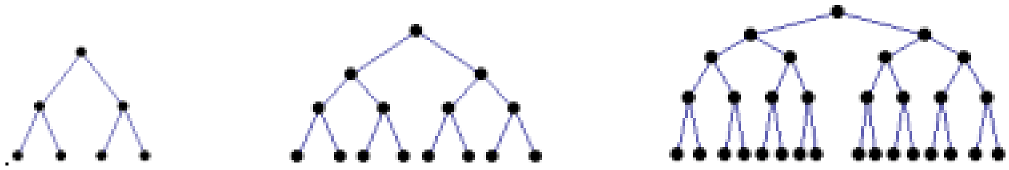
- *Contenu : coloration ; nombre chromatique.*

### Exemple 19 : diamètre d'un graphe

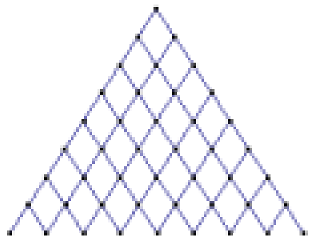
1- Caractériser les graphes de diamètre 1.Trouver le diamètre des graphes ci-dessous.



2- Quels sont les diamètres des graphes ci-dessous ? Si on continuait à construire des graphes sur le même modèle, quels seraient les nombres de sommets et d'arêtes en fonction du diamètre ?



3- Quel est le diamètre du graphe ci-dessous ? Si on « continuait » ce graphe, comment évoluerait l'ordre du graphe en fonction du diamètre ?



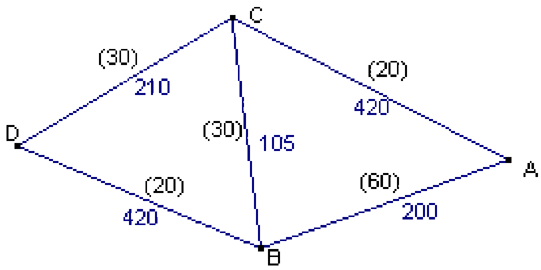
- *Contenu : diamètre d'un graphe*

### Exemple 20 : parcours autoroutier

Sur les arêtes du graphe suivant, représentant un réseau autoroutier, on a marqué les distances entre deux étapes et, entre parenthèses, les prix des péages. Entre D et A, déterminer :

- la chaîne la plus courte ;

- la chaîne qui minimise la somme dépensée en péage.

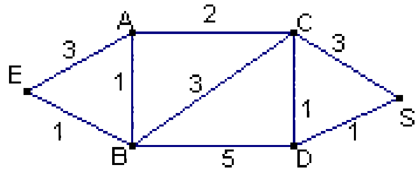



- *Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne ; plus courte chaîne.*

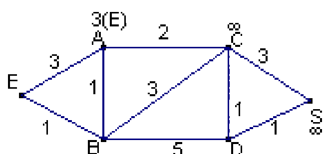
### Exemple 21 : algorithme de Dijkstra

On présente ici un algorithme de recherche de la plus courte chaîne entre deux sommets d'un graphe.

Exemple :

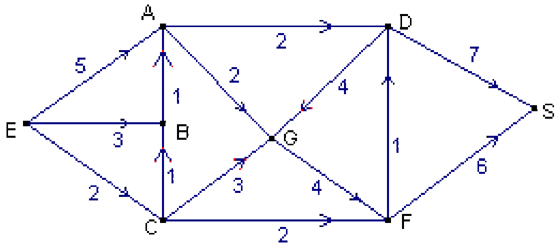



Initialisation : on affecte le poids 0 à E et on attribue provisoirement aux sommets adjacents à E les poids des arêtes qui les relient à E, et aux autres sommets le poids +∞. On pose :



Le même algorithme s'applique aux graphes orientés.

Exemple :




| E | A | B | C | D | F | G | S | $\mathcal{S}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5(E) | 3(E) | 2(E) | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | E |
| | | | 2(E) | | 4(C) | 5(C) | | E,C |
| | 4(B) | 3(E) | | | | | | E,B,C |
| | 4(B) | | | 6(A) | | | | E,B,C,A |
| | | | | 5(F) | 4(C) | | 10(F) | E,B,C,A,F |
| | | | | 5(F) | | | | E,B,C,A,F,D |
| | | | | | | 5(C) | | E,B,C,A,F,D,G |
| | | | | | | | 10(F) | E,B,C,A,F,D,G,S |

La chaîne la plus courte se lit à l'envers sur le tableau : S, F, C, E. Elle a pour longueur 10.

- *Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne ; plus courte chaîne.*

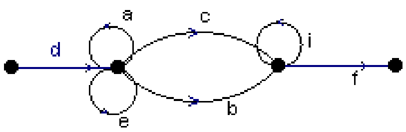
## Exemple 22 : reconnaissance de codes

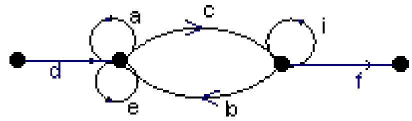
Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes, qui ne doivent cependant pas avoir le même code d'accès. Cet accès est régi par un des graphes étiquetés ci-dessous ; un mot est accepté comme code d'accès (ou reconnu) si c'est une liste de lettres commençant par d et terminant par f, associée à une chaîne de ce graphe.

- Les mots « decif » et « daaeebiif » sont-ils des mots reconnus par les graphes étiquetés ci-dessous ?

- Donner, pour chaque graphe ci-dessous, la liste des mots de 5 lettres reconnus.

- Caractériser pour chaque graphe les mots reconnus.




- *Contenu : graphe étiqueté.*

## Exemple 23 : l'allumeur de réverbère

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

- Qu'observe-t-on en simulant une grande population de réverbères régis par le même système probabiliste de changements d'états ?

- Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.

- Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.

- Soit M la matrice de transition associée à ce graphe :

Vérifier que $M = N - \frac{1}{2}R$, où $N = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Calculer $N^2$, $R^2$, NR et RN puis en déduire $M^n$, pour $n$ entier naturel.

- Au jour 0, le réverbère est allumé (resp. éteint). Calculer la probabilité $p_n$ (resp. $p'_n$) que le réverbère soit allumé (resp. éteint) au $n^{\text{ième}}$ matin. Faire le lien avec les résultats des simulations observées en 1.

*Remarque : on peut varier cet exemple en utilisant l'égalité matricielle suivante, où a et b sont des nombres dans ]0,1[ , et en calculant ainsi aisément la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice de transition associée à un graphe probabiliste :*

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/(a+b) & a/(a+b) \\ b/(a+b) & a/(a+b) \end{pmatrix} + (1-a-b)\begin{pmatrix} a/(a+b) & -a/(a+b) \\ -b/(a+b) & b/(a+b) \end{pmatrix}$$

- *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.*

## Exemple 24 : transferts de population

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires ; 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

- Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans.

- Que se passe-t-il si on suppose que 99% des habitants sont initialement en Y ou en X ? que la population est également répartie entre les deux villes (500 000 dans chaque ville en l'année 0) ? Que constate-t-on ?

*Remarque : on pourra refaire le problème en variant, non plus les conditions de départ, mais les coefficients de transition : 15% et 5%, ou 40% et 20%, par exemple.*

- *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition.*

## Exemple 25 : un problème d'endémie

Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer suivant les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;

- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;

- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition. Calculer (avec une calculatrice ou un ordinateur) la probabilité qu'il soit malade ou immunisé au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :

- au départ, il est immunisé,

- au départ, il est non malade et non immunisé,

- au départ, il est malade.

Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ?

Solution

Au bout d'un an, de deux ans, de trois ans, etc. quel que soit l'état initial, l'individu considéré a une probabilité 0,755 d'être immunisé, 0,151 d'être non malade et non immunisé, 0,094 d'être malade. L'état (0,755 ; 0,151 ; 0,094) est stable. La maladie touche donc en permanence environ 9,4% de la population.

- *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.*