



Unité MA 4.04

Outils mathématiques des biosciences

Examen du 3 mai 2002

durée: 1h

Exercice 1 5 points

On note $V = \{\text{l'alevin est commercialisé au bout d'un an}\}$, $A = \{\text{l'alevin appartient à l'élevage A}\}$, $B = \{\text{l'alevin appartient à l'élevage B}\}$, $C = \{\text{l'alevin appartient à l'élevage C}\}$.

Les ensembles A, B, C forment une partition de Ω . Donc

$$\begin{aligned} P(A|V) &= \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{P(A \cap V)}{P(A \cap V) + P(B \cap V) + P(C \cap V)} \\ &= \frac{P(V|A)P(A)}{P(V|A)P(A) + P(V|B)P(B) + P(V|C)P(C)} \\ &= \frac{0.65 \times 0.25}{0.65 \times 0.25 + 0.72 \times 0.35 + 0.69 \times 0.4} = 23.53\% \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Le nombre X_{10} de truites pigmentée suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.115$.

1 point $P(X_{10} = 0) = (1 - p)^{10} = 29.47\%$

1 point $P(X_{10} = 1) = 10p(1 - p)^9 = 38.3\%$

1 point $P(X_{10} = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1 - p)^8 = 45p^2 (1 - p)^8 = 22.4\%$

1 point $P(X_{10} > 2) = 1 - P(X_{10} \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = 9.8\%$

2. On prélève 300 truites.

- (a) Le nombre X_{300} de truites pigmentée suit une loi binomiale de paramètre $n = 300$ et $p = 0.115$. 1 point

- (b) Comme 300 est grand et que $np = 34.5$ n'est pas trop petit, on peut approcher la loi de X_{300} par une loi normale d'espérance $np = 34.5$ et de variance $\sigma^2 = np(1-p) = 30.53$. **1 point** Ainsi on peut approcher la loi de $Z = \frac{X_{300}-34.5}{\sqrt{30.53}}$ par une loi normale centrée réduite.

(c) i.

$$P(X_{300} \leq 43) = P\left(\frac{X_{300} - 34.5}{\sqrt{30.53}} \leq \frac{43 - 34.5}{\sqrt{30.53}}\right)$$

1 point $= P\left(Z \leq \frac{43 - 34.5}{\sqrt{30.53}}\right) = P(Z \leq 1.538) = 93.8\%$

$$P(X_{300} < 28) = P\left(Z < \frac{28 - 34.5}{\sqrt{30.53}}\right)$$

$$= P(Z < -1.176) = P(Z > 1.176)$$

1 point $= 1 - P(Z \leq 1.176) = 1 - 0.88 = 12\%$

$$P(28 < X_{300} \leq 47) = P(X_{300} \leq 47) - P(X_{300} \leq 28) \text{ Comme}$$

$$P(X_{300} \leq 47) = P\left(Z \leq \frac{47 - 34.5}{\sqrt{30.53}}\right) = P(Z \leq 2.262) = 0.988,$$

on a

$$P(28 < X_{300} \leq 47) = P(X_{300} \leq 47) - P(X_{300} \leq 28) = 98.8\% - 12\% = 86.8\% \text{ .2 points}$$

- ii. $P(X_{300} > n_0) = P\left(\frac{X_{300}-34.5}{\sqrt{30.53}} > \frac{n_0-34.5}{\sqrt{30.53}}\right) = P\left(Z > \frac{n_0-34.5}{\sqrt{30.53}}\right)$.
 Pour avoir $P(X_{300} > n_0) < 2.5\%$, il faut et il suffit donc que
 $P\left(Z > \frac{n_0-34.5}{\sqrt{30.53}}\right) < 2.5\%$, c'est à dire que

$$P\left(Z \leq \frac{n_0 - 34.5}{\sqrt{30.53}}\right) \geq 1 - 2.5\% = 0.975.$$

Il faut et il suffit donc d'avoir $\frac{n_0-34.5}{\sqrt{30.53}} \geq 1.96$, soit

$$n_0 \geq 1.96 * \sqrt{30.53} + 34.5 = 45.33, \text{ donc } n_0 \geq 46. \text{2 points}$$

3. (a) La loi du nombre N d'essais nécessaires suit une loi géométrique de paramètre $p = 0.115$.

$$P(N \leq 3) = 1 - P(N > 3) = 1 - (1-p)^3 = 30.68\% .$$

1 point

- (b) Il faut en moyenne $\mathbb{E}N = 1/p = 8.696$ essais. **1 point**

- (c) On veut $P(N \leq n) \geq 85\%$, soit $P(N > n) \leq 1 - 85\% = 0.15$. On veut donc $(1-p)^n \leq 0.15$ soit $n > \frac{\log 0.15}{\log(1-p)} = 15.53$. Il faut au moins 16 essais. **1 point**

FIN DE L'ÉPREUVE