Université d'Orléans

Deug Sciences de la Vie

Unité MA 4.06a

Outils mathématiques des biosciences

Devoir à rendre dans la semaine du 17 au 23 mars 2002
Corrigé

Exercice I 13 points

1. (a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - $P(E_1) = \frac{6\times3\times2}{\binom{11}{3}} = \frac{36}{165} = \frac{12}{55} =\sim 0.22$. 2 points
   - $P(E_2) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{20+1}{165} = \frac{7}{55} \sim 0.11$. 2 points

   (b) X est à valeurs dans $\{0,1,2,3\}$, avec pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$: $P(X=k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{11}{3}}$, soit $P(X=0) = \frac{1\times10}{165} = \frac{2}{33}$, $P(X=1) = \frac{6\times10}{165} = \frac{12}{33}$, $P(X=2) = \frac{15\times5}{165} = \frac{15}{33}$, $P(X=3) = \frac{20\times1}{165} = \frac{4}{33}$. 2 points

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= 0.P(X=0) + 1.P(X=1) + 2P(X=2) + 3.P(X=3) \\ &= \frac{0\times2 + 1\times12 + 2\times15 + 3\times4}{33} \\ \text{2 points} \quad &= \frac{54}{33} = \frac{54}{33} \sim 1.64. \end{aligned}$$

2. La probabilité de ne tirer que des brochets est $(6/11)^k$. La probabilité de ne tirer que des gardons est $(3/11)^k$.
   Ainsi

$$(6/11)^k \geq 1000(3/11)^k \iff 2^k \geq 1000 \iff k \geq \frac{\log 1000}{\log 2} \sim 9.97.$$

   Comme k doit être entier, on doit avoir $k \geq 10$. 2 points

3. On a vu que $P(3 \text{ gardons}) = (3/11)^3$ et $P(3 \text{ brochets}) = (6/11)^3$. De même $P(3 \text{ limandes}) = (2/11)^3$. D'autre part

$$P(3 \text{ poissons identiques}) = P(3 \text{ gardons}) + P(3 \text{ brochets}) + P(3 \text{ limandes}).$$

   On a donc

$$\begin{aligned} P(3 \text{ brochets} | 3 \text{ poissons identiques}) &= \frac{P(3 \text{ brochets})}{P(3 \text{ poissons identiques})} \\ \text{3 points} \quad &= \frac{(6/11)^3}{(6/11)^3 + (3/11)^3 + (2/11)^3} = \frac{6^3}{6^3+3^3+2^3} = \frac{216}{251}. \end{aligned}$$

Exercice II 7 points

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10000$ habitants, et $p = 0,3$. 2 points Comme n est grand et que npq n'est pas trop petit, on peut approcher la loi de X par une loi normale d'espérance $np = 3000$ et de variance $np(1-p) = 2100$. 2 points Cela revient à approcher la loi de

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X - 3000}{10\sqrt{21}}$$

par une gaussienne centrée réduite. La table nous dit que la probabilité qu'une gaussienne centrée réduite Z soit plus petite que a est plus grande que 90% (c'est à dire $P(Z \leq a) \geq 0.9$) lorque $a = 1.29$. Ainsi dans 90% des cas, on a $\frac{X-3000}{10\sqrt{21}} \leq 1.29$, soit $X \leq 3000 + 10\sqrt{21} \times 1.29 = 3059,11...$

Ainsi si l'on dispose de 3060 vaccins, il y a au moins neuf chances sur dix qu'on puisse satisfaire la demande, autremend dit il y a moins de 10% de chances pour qu'on se trouve en rupture de stock. 3 points

FIN DU DEVOIR