Schémas numériques pour les équations de Hamilton-Jacobi

On considère une fonction H continue sur $\mathbb{R}$, et une condition initiale $x \mapsto u_0(x)$ bornée et Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de constante de Lipschitz L. Soit $(t,x) \mapsto u(t,x)$ solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \partial_t u + H(\partial_x u) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{HJ}$$

La fonction H est appelée *Hamiltonien.* Si H et u_0 sont suffisamment régulières, et si u_0 est à support compact, on peut montrer que ce problème admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^2$ définie pour $t \in [0,T[$ et $x \in \mathbb{R}$, où T est un temps maximal d'existence. Si on considère que u est solution presque partout de l'équation (HJ), on peut alors exhiber des solutions moins régulières, Lipschitziennes et définies sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Elles ne sont en revanche pas uniques. On peut montrer qu'une classe de solutions, appelées *solution de viscosité*, assure l'existence sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et l'unicité de la solution de (HJ). Cette notion sera définie dans la suite.
Le but de ce problème est de proposer des schémas aux différences finies pour (HJ). Le manque de régularité des solutions de viscosité, la complexité de leur définition, ainsi que la non linéarité de (HJ) entraînent que des conditions doivent être vérifiées pour assurer la convergence des schémas vers la solution de viscosité de (HJ).

I - Notations

Dans toute la suite, on considérera les paramètres Δt et Δx strictement positifs et on définit la grille

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)_{n\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{Z}}.$$

De manière générale, on notera en majuscules les suites bornées $U = (U_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$. On équipera cet espace de la norme

$$\|U\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |U_j|,$$

et si $U, V \in l^\infty(\mathbb{Z})$, on notera $U \leqslant V$ si $\forall j \in \mathbb{Z}$, $U_j \leqslant V_j$.

On notera U^n l'approximation numérique de u par le schéma au temps t_n : il s'agit d'un élément de $l^\infty(\mathbb{Z})$ dont les valeurs sont notées U_j^n (qui est donc une approximation de $u(t_n,x_j)$). On va considérer des schémas explicites à un pas qu'on définit par récurrence, avec l'initialisation $U_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et avec la relation

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ U_j^{n+1} = G(U_{j-p}^n, \dots, U_{j+q+1}^n), \tag{S}$$

où $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sont fixés. La fonction G est donc une fonction de $p+q+2$ variables. Pour simplifier les notations, on pourra aussi écrire cette relation sous forme vectorielle

$$U^{n+1} = \mathbf{G}(U^n). \tag{1}$$

On suppose que le schéma est écrit à l'aide de différences finies, c'est à dire qu'il existe une fonction g telle que

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ G(U_{j-p}^n, \dots, U_{j+q+1}^n) = U_j^n - \Delta t\, g\left(\frac{U_{j-p+1}^n - U_{j-p}^n}{\Delta x}, \dots, \frac{U_{j+q+1}^n - U_{j+q}^n}{\Delta x}\right). \tag{2}$$

L'expression précédente n'est qu'une réécriture du schéma (S), on utilisera indifféremment les deux formes. La fonction g est appelée *Hamiltonien numérique*, elle sera supposée localement Lipschitzienne dans la suite :

$$\forall v \in \mathbb{R}^{p+q+1},\ \forall \eta > 0,\ \exists k > 0,\ \forall w_1, w_2 \in B_{\|\cdot\|}(v,\eta),\ |g(w_1) - g(w_2)| \leqslant k\|w_1 - w_2\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^{p+q+1}$, et $B_{\|\cdot\|}(v,\eta)$ est la boule ouverte de centre v et de rayon η associée à cette norme.

On rappelle que l'erreur de troncature du schéma (S) s'écrit

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N},\ \ E_j^n = u(t_{n+1}, x_j) - G(u(t_n, x_{j-p}), \dots, u(t_n, x_{j+q+1})),$$

où u est une solution de (HJ) qu'on suppose de classe $\mathcal{C}^2$. Un schéma est dit consistant si il existe $r > 0$ et $s > 0$ tels que

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ E_j^n = \Delta t \left(\mathcal{O}(\Delta t^r) + \mathcal{O}(\Delta x^s)\right),$$

quand Δt et Δx tendent vers 0. On dit alors qu'il est consistant à l'ordre r en temps et s en espace.

Question I – 1. On suppose que $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que $u \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[\times\mathbb{R})$. À l'aide de développements limités de u, montrer que

$$E_j^n = \Delta t \left[\partial_t u(t_n, x_j) + g\left(\partial_x u(t_n, x_j), \dots, \partial_x u(t_n, x_j)\right) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)\right].$$

En déduire que le schéma (S) est consistant avec l'équation (HJ) si et seulement si

$$\forall a \in \mathbb{R},\ g(a, \dots, a) = H(a), \tag{3}$$

et préciser son ordre de consistance.

Question I – 2. Soit $U \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathbf{G}(U) \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

On dira que le schéma (S) est *monotone* sur $[-R, R]$ si G est une fonction croissante de chacun de ses arguments sur le domaine

$$d_R = \left\{(U_{j-p}, \dots, U_{j+q+1}) \in \mathbb{R}^{p+q+2},\ \left|\frac{U_{j-p+1} - U_{j-p}}{\Delta x}\right| \leqslant R,\ \dots, \left|\frac{U_{j+q+1} - U_{j+q}}{\Delta x}\right| \leqslant R\right\}.$$

C'est à dire que pour tout $k \in [\![-p, q+1]\!]$, et en fixant $U_{j-p}, \dots, U_{j+k-1}, U_{j+k+1}, \dots, U_{j+q+1}$, la fonction

$$x \longmapsto G(U_{j-p}, \dots, U_{j+k-1}, x, U_{j+k+1}, \dots, U_{j+q+1}),$$

est croissante pour x tel que $(U_{j-p}, \dots, U_{j+k-1}, x, U_{j+k+1}, \dots, U_{j+q+1}) \in d_R$.

II - Le cas linéaire : l'équation de transport

Dans cette partie, on se place dans le cas de l'équation de transport : le Hamiltonien H est une fonction linéaire, $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = c\ x$ où $c \geqslant 0$ est fixé. En utilisant les notations précédentes, on considère le schéma aux différences finies donné par la fonction

$$G(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) = U_j^n - \Delta t\ c\ \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}, \tag{4}$$

et on suppose que Δt et Δx sont choisis tels que

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1.$$

Question II – 3. Montrer que le schéma (4) est consistant avec l'équation de transport.

Question II – 4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{Z},\ \inf_{i\in\mathbb{Z}} u_0(x_i) \leqslant u_j^n \leqslant \sup_{i\in\mathbb{Z}} u_0(x_i).$$

Question II – 5. Soit $\varepsilon_j^n = |u(t_n, x_j) - U_j^n|$. Montrer que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j^{n+1} \leqslant C\Delta t(\Delta t + \Delta x) + \sup_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j^n,$$

et en déduire que le schéma (4) est convergent, c'est à dire que

$$\sup_{n\in[\![0,N]\!]} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j^n \underset{\Delta t\to 0,\ \Delta x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Question II – 6. Montrer que le schéma (4) est monotone sur tout intervalle $[-R, R]$.

III - Stabilité du schéma (S)

Dans toute la suite de ce problème, on fixe le rapport

$$\Lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

on suppose que le schéma (S) est monotone sur $[-(L+1), L+1]$, où L est la constante de Lipschitz de u_0, et consistant avec l'équation (HJ). On définit l'ensemble

$$D_{L+1} = \left\{ U \in l^{\infty}(\mathbb{Z}),\ \forall j \in \mathbb{Z}, \left| \frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x} \right| \leqslant L+1 \right\}.$$

Ainsi $\mathbf{G} : D_{L+1} \longrightarrow l^{\infty}(\mathbb{Z})$. Dans toute cette partie, on considère $U, V \in D_{L+1}$.

Question III – 7. On suppose $U \leqslant V$. Montrer que $\mathbf{G}(U) \leqslant \mathbf{G}(V)$.

Dans toute la suite, on fera l'abus de notation suivant : si $U \in l^{\infty}(\mathbb{Z})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $U + \lambda$ l'élément de $l^{\infty}(\mathbb{Z})$ tel que $\forall j \in \mathbb{Z}$, $(U+\lambda)_j = U_j + \lambda$.

Question III – 8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $U + \lambda \in D_{L+1}$ et que $\mathbf{G}(U+\lambda) = \mathbf{G}(U) + \lambda$.

Question III – 9. Montrer que $U \leqslant V + \|U - V\|_{\infty}$, puis en déduire que $\|\mathbf{G}(U) - \mathbf{G}(V)\|_{\infty} \leqslant \|U - V\|_{\infty}$.

Question III – 10. Montrer que $\|\Delta_+ \mathbf{G}(U)\|_{\infty} \leqslant \|\Delta_+ U\|_{\infty}$.
Vous pourrez utiliser les opérateurs $\Delta_+ : D_{L+1} \longrightarrow l^{\infty}(\mathbb{Z})$ et $\tau_1 : D_{L+1} \longrightarrow D_{L+1}$, définis par

$$\forall\, U \in D_{L+1},\ \forall\, j \in \mathbb{Z},\ \ (\Delta_+ U)_j = U_{j+1} - U_j, \ \ \textit{et}\ \ (\tau_1 U)_j = U_{j+1}.$$

Question III – 11. Montrer que $\mathbf{G}(U) \in D_{L+1}$.

Question III – 12. Soient $K = \sup\{|g(\xi)|,\ \xi \in d_{L+1}\}$, et $n, m \in \mathbb{N}$. On note

$$\mathbf{G}^n = \underbrace{\mathbf{G} \circ \cdots \circ \mathbf{G}}_{n \text{ fois}},$$

montrer que $\|\mathbf{G}^{n+m}(U) - \mathbf{G}^n(U)\|_{\infty} \leqslant m \Delta t K$.

Question III – 13. Montrer que $\|\mathbf{G}^n(U)\|_{\infty} \leqslant \|U\|_{\infty} + n\Delta t |H(0)|$.

IV - Convergence du schéma (S)

Dans toute la suite, le schéma (S) est supposé monotone sur $[-(L+1), L+1]$ et consistant avec l'équation (HJ). On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et T tel que $N\Delta t = T$, et on suppose

$$\sup_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 0 \leqslant n \leqslant N}} \left\{ u(t_n, x_j) - U_j^n \right\} = \sigma \ >\ 0. \tag{5}$$

Le but de cette partie est de majorer σ, pour établir la convergence du schéma numérique. La même technique pourrait être utilisée pour estimer inf $\{u(t, x_j) - U_j^n\}$ dans le cas où cette quantité est négative. Pour établir ce résultat, on a besoin de définir plus précisément les solutions de viscosité des équations de Hamilon-Jacobi. On a le résultat suivant

Théorème 1 (Existence et unicité pour les équations de Hamilton-Jacobi). *On suppose $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et u_0 bornée et Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction u bornée et Lipschitzienne sur $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ pour tout $T > 0$, telle que $u(0,x) = u_0(x)$ et telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$ et tout $T > 0$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Si } (t_0, x_0) \textit{ est un point de maximum local de } u - \varphi \textit{ sur }]0,T] \times \mathbb{R} \textit{ alors} \\ \qquad\qquad \partial_t \varphi(t_0,x_0) + H\left(\partial_x \varphi(t_0,x_0)\right) \leqslant 0, \end{array} \right. \tag{6}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Si } (t_0, x_0) \textit{ est un point de minimum local de } u - \varphi \textit{ sur }]0,T] \times \mathbb{R} \textit{ alors} \\ \qquad\qquad \partial_t \varphi(t_0,x_0) + H\left(\partial_x \varphi(t_0,x_0)\right) \geqslant 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

Une telle fonction u est appelée *solution de viscosité* de l'équation (HJ). Remarquons que si la fonction u est solution classique (de classe $\mathcal{C}^1$) de l'équation (HJ), alors elle en est solution de viscosité. Réciproquement, une solution de viscosité de (HJ) vérifie

$$\partial_t u(t_0,x_0) + H\left(\partial_x u(t_0,x_0)\right) = 0,$$

en tout point (t_0, x_0) où elle est différentiable. Cette notion de solution est nécessaire pour avoir l'existence et l'unicité de la solution de (HJ) sur $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$. La solution de viscosité de (HJ) vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \inf_{\mathbb{R}} u_0 \leqslant tH(0) + u(t,x) \leqslant \sup_{\mathbb{R}} u_0. \tag{8}$$

On définit les ensembles

$$\begin{array}{ll} Q = [0,+\infty[\times\mathbb{R}, & Q_T = [0,T] \times \mathbb{R}, \\ Q^d = (t_n, x_j)_{n\in\mathbb{N},\, j\in\mathbb{Z}}, & Q_N^d = (t_n, x_j)_{0 \leqslant n \leqslant N,\, j\in\mathbb{Z}}, \\ & Q_{T,N} = Q_T \times Q_N^d, \end{array}$$

et $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta(t,x) = 1 - (t^2 + x^2) & \text{si } t^2 + x^2 \leqslant 1/2 \\ \beta(t,x) \ < \ 1/2 & \text{si } t^2 + x^2 \ > \ 1/2 \\ \beta(t,x) = 0 & \text{si } t^2 + x^2 \ > \ 1. \end{array} \right. \tag{9}$$

Pour $\varepsilon > 0$ on pose $\beta_\varepsilon(t,x) = \beta(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$.

Question IV – 14. Dans toute la suite, on pose

$$M = \sup_{y\in\mathbb{R}}(|u_0(y)|) + T|H(0)|.$$

(a). Montrer que pour tout $(t,x) \in Q_T$, $|u(t,x)| \leqslant M$.

(b). Montrer que pour tout $n \in [\![0,N]\!]$, $\|U^n\|_\infty \leqslant M$.

Pour simplifier, on suppose que

$$u(t,x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad U_j^n \underset{|j|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{10}$$

et que ces convergences sont uniformes en $t \in [0,T]$ et en $n \in [\![0,N]\!]$. On remarquera, mais ce n'est pas l'objet de ce problème, que cette hypothèse n'est pas nécessaire pour établir la convergence du schéma (S). On définit $\psi : Q \times Q^d \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall (t,x) \in Q,\ \forall (t_n, x_j) \in Q_d,\ \psi(t,x,t_n,x_j) = u(t,x) - U_j^n - \frac{\sigma}{4T}(t + t_n) + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(t - t_n, x - x_j).$$

Question IV – 15.

(a). En considérant un bon choix de (t,x,t_n,x_j), montrer que

$$\sup_{Q_{T,N}} \psi \geqslant \sigma + 5M,$$

et que pour tous $(t,x) \in Q, (t_n, x_j) \in Q_d$ tels que $\beta_\varepsilon(t-t_n, x-x_j) = 0,\ \ \psi(t,x,t_n,x_j) \leqslant 2M$.

(b). En utilisant (10), en déduire qu'il existe $(t_0, x_0, t_{n_0}, x_{j_0}) \in Q_{T,N}$ tel que $\psi(t_0, x_0, t_{n_0}, x_{j_0}) \geqslant \psi(t,x,t_n,x_j)$ pour tout $(t,x,t_n,x_j) \in Q_{T,N}$.

(c). Montrer que $\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) \geqslant 3/5$.

(d). En déduire que

$$\partial_t \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) = -\frac{2}{\varepsilon^2}(t_0 - t_{n_0}), \ \text{ et } \ \partial_x \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) = -\frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - x_{j_0}).$$

En notant $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $f^+ = \max(f,0)$, la solution de viscosité de (HJ) possède les propriétés suivantes :

Théorème 2 (Propriétés de la solution de viscosité de (HJ))**.** *Soit $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, u_0 et v_0 deux fonctions bornées et L-Lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ et u, v les solutions de viscosité de* (HJ) *associées à ces deux conditions initiales. On fixe $t \geqslant 0$. Alors*

- ***i.*** $\|(u(t,\cdot) - v(t,\cdot))^+\| \leqslant \|(u_0 - v_0)^+\|$.
- ***ii.*** $\|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\| \leqslant \|u_0 - v_0\|$.
- ***iii.*** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\inf_{\mathbb{R}} u_0 \leqslant tH(0) + u(t,x) \leqslant \sup_{\mathbb{R}} u_0$.
- ***iv.*** *Pour tout $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $|u(t,x+y) - u(t,x)| \leqslant \sup_{z\in\mathbb{R}} |u_0(z+y) - u_0(z)|$.
- ***v.*** $x \mapsto u(t,x)$ *est L-Lipschitzienne et*

$$\forall \tau \geqslant 0, \ \ \|u(t,\cdot) - u(\tau,\cdot)\| \ \leqslant \ |t-\tau| \sup_{|p| \leqslant L} |H(p)|.$$

On remarquera en particulier que la solution de viscosité de (HJ) n'est a priori pas dérivable, puisqu'elle n'est que L-Lipschitzienne.

Question IV – 16.

(a). Montrer que

$$x \mapsto u(t_0, x) + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right) \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x - x_{j_0}),$$

admet un maximum en x_0, puis en déduire que

$$\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right) |\partial_x \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0})| \leqslant L.$$

où L désigne la constante de Lipschitz de u_0.

(b). On suppose $t_0 > 0$ et on note $L_1 = \max\{|H(p)|, |p| \leqslant L\}$. Montrer que

$$-\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right) \partial_t \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) \leqslant L_1 - \frac{\sigma}{4T}.$$

(c). On suppose que $0 < t_0 < T$. Montrer que

$$\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right) |\partial_t \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0})| \ \leqslant L_1 + \frac{\sigma}{4T}.$$

(d). En utilisant la question IV -15, en déduire que

$$|x_0 - x_{j_0}| \leqslant \varepsilon^2 \frac{L}{10M + \sigma},$$

que si $t_0 = T$ alors

$$|t_0 - t_{n_0}| \leqslant \varepsilon^2 \frac{L_1 - \frac{\sigma}{4T}}{10M + \sigma},$$

et enfin que si $0 < t_0 < T$ on a

$$|t_0 - t_{n_0}| \leqslant \varepsilon^2 \frac{L_1 + \frac{\sigma}{4T}}{10M + \sigma}.$$

Dans la suite, on fixe

$$\varepsilon = (\Delta t + \Delta x)^{1/4},$$

et on poursuit la preuve de la convergence du schéma (S) en traitant séparément les cas $(t_0, t_{n_0} > 0)$, $(t_0 \geqslant 0,\ t_{n_0} = 0)$ et $(t_0 = 0,\ t_{n_0} > 0)$.

IV-A Cas où $t_0 > 0$, $t_{n_0} > 0$

Question IV – 17.

(a). Montrer que (t_0, x_0) réalise le maximum sur Q_T de

$$(t,x) \mapsto u(t,x) - \frac{\sigma}{4T}t + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(t - t_{n_0}, x - x_{j_0}).$$

(b). Déduire à l'aide du théorème 1 que

$$\frac{\sigma}{4T} - \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\partial_t\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) + H\left(-\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\partial_x\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0})\right) \leqslant 0.$$

Question IV – 18.

(a). Montrer que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$U_j^n \geqslant U_{j_0}^{n_0} + \frac{\sigma}{4T}(n_0 - n)\Delta t - \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)(\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_n, x_0 - x_j)).$$

(b). Montrer qu'il existe une constante C_1 indépendante de ε telle que pour tout $k \in [\![-p, q]\!]$,

$$\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\left|\frac{\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+k+1}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+k})}{\Delta x}\right| \leqslant L + C_1\,\frac{\Delta t + \Delta x}{\varepsilon^2}.$$

En déduire que si Δt est assez petit,

$$\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\left|\frac{\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+k+1}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+k})}{\Delta x}\right| \leqslant 1 + L.$$

(c). En utilisant notamment les questions III -7 et III -8, montrer que

$$\begin{aligned} U_{j_0}^{n_0} \geqslant U_{j_0}^{n_0} &+ \frac{\sigma}{4T}\Delta t - \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\Big(\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0})\Big) \\ &- \Delta t g\left(\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\frac{\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0-p+1}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0-p})}{\Delta x},\right. \\ &\left.\ldots, \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\frac{\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+q+1}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+q})}{\Delta x}\right). \end{aligned}$$

(d). Montrer qu'il existe une constante C_2, indépendante de ε telle que

$$\frac{\sigma}{4T} \leqslant -\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\partial_t\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) + H\left(-\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\partial_x\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0})\right) + C_2\,\frac{\Delta t + \Delta x}{\varepsilon^2}.$$

(e). En déduire qu'il existe une constante C_3, indépendante de ε telle que

$$\sigma \leqslant C_3\,(\Delta t)^{\frac{1}{2}}.$$

IV-B Cas où $t_0 = 0$ ou $t_{n_0} = 0$

Question IV – 19. On suppose que $t_0 \geqslant 0$ et $t_{n_0} = 0$.

(a). Montrer que

$$5M + \sigma \leqslant |u(t_0, x_0) - u(t_0, x_{j_0})| + |u(t_0, x_{j_0}) - u(0, x_{j_0})| + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(t_0, x_0 - x_{j_0}).$$

(b). En déduire qu'il existe une constante C_4 telle que

$$\sigma \leqslant C_4\,(\Delta t)^{1/2}.$$

Question IV – 20. On suppose que $t_0 = 0$ et $t_{n_0} > 0$.

(a). Montrer que

$$5M + \sigma \leqslant 5M + \frac{\sigma}{2} + L|x_0 - x_{j_0}| + \|U^0 - \mathbf{G}^{n_0}(U^0)\|_\infty,$$

et en déduire que

$$\sigma \leqslant 2L|x_0 - x_{j_0}| + 2Kt_{n_0}.$$

(b). Montrer que

$$-U_{j_0}^{n_0} - \frac{\sigma}{4T}t_{n_0} + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(-t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) \geqslant -U_{j_0}^{n_0-1} - \frac{\sigma}{4T}(t_{n_0} - \Delta t) + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(\Delta t - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}),$$

et en déduire que si Δt est assez petit alors

$$\frac{5M + \sigma/2}{\varepsilon^2}\left(t_{n_0}^2 - (t_{n_0} - \Delta t)^2\right) \leqslant K\Delta t.$$

(c). En déduire qu'il existe une constante C_5 telle que

$$\sigma \leqslant C_5 \ (\Delta t)^{1/2}.$$

IV-C Conclusion

Les questions précédentes ont permis de montrer le résultat suivant :

Théorème 3. *On suppose $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continu, u_0 bornée et L-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, $\Lambda = \Delta t/\Delta x$ et N sont fixés. Si le schéma* (S) *est monotone sur $[-(L+1),(L+1)]$, consistant avec* (HJ), *tel que le Hamiltonien numérique g soit localement Lipschitzien, et initialisé avec $U_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. En notant u la solution de viscosité de* (HJ), *alors il existe une constante C qui ne dépend que de* $\sup|u_0|$, *L, g et T telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$,*

$$|U_j^n - u(t_n, x_j)| \leqslant c\sqrt{\Delta t}.$$

Question IV – 21. Comparer l'ordre de convergence du schéma (S) à l'ordre de consistance établi en question I -1. Commenter.

V - Exemples

Question V – 22.

(a). On suppose que H est croissant, de classe $\mathcal{C}^1$, et vérifie les hypothèses du théorème 3. On considère le schéma initialisé par $U_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout j, et défini pour tout $j \in \mathbb{Z}$ par

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \Delta t H\left(\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}\right).$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que si $C\Delta t \leqslant \Delta x$, alors ce schéma converge vers la solution de viscosité de (HJ).

(b). On suppose que H est décroissant, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie les hypothèses du théorème 3. On considère le schéma initialisé par $U_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout j, et défini pour tout $j \in \mathbb{Z}$ par

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \Delta t H\left(\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}\right).$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que si $C\Delta t \leqslant \Delta x$, alors ce schéma converge vers la solution de viscosité de (HJ).

(c). On considère le Hamiltonien $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $H(p) = p^2$ pour tout $p \in \mathbb{R}$. Proposer un schéma qui approche correctement la solution de viscosité de (HJ).

FIN DE L'EPREUVE