Rapport de jury
Épreuve de mathématiques générales
Second concours - Session 2018
ENS Paris-Saclay, ENS Rennes

1 Description du sujet

Le sujet portait sur des problèmes de comptage de points entiers dans des espaces euclidiens.

Les deux premières parties visaient à étudier le problème du cercle primitif de Gauss, c'est-à-dire le problème de dénombrement des points primitifs dans un cercle du plan $\mathbb{R}^2$. Le résultat démontré à la fin de la partie 2 était le suivant : en notant

$$N_{prim}(R) = \text{Card}\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{pgcd}(a,b) = 1 \text{ et } \|(a,b)\| \leq R\},$$

on a l'asymptotique suivante

$$N_{prim}(R) = \frac{1}{\zeta(2)}\pi R^2 + O(R\ln(R)) \quad \text{quand } R \to +\infty.$$

Il s'agissait essentiellement de prouver rigoureusement que la "probabilité" que deux entiers soient premiers entre eux est de $1/\zeta(2)$, à l'aide d'une étude analytique de la fonction zêta et de considérations arithmétiques.

Les deux dernières parties concernaient le problème de comptage de points d'un réseau d'un espace euclidien. Le résultat démontré à la fin de la partie IV était le suivant : la fonction thêta associée à un réseau Λ, définie par

$$\forall \tau \in \mathbb{H}, \quad \Theta_\Lambda(\tau) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} e^{i\pi\tau\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle},$$

est un forme modulaire, si Λ est un réseau pair unimodulaire autodual (à l'image de Λ_8, introduit dans le sujet). Ce résultat s'appuyait sur une formule de Poisson pour les réseaux de $\mathbb{R}^d$, faisant l'objet de la partie III, ainsi que sur quelques résultats sur les fonctions holomorphes et l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$.

La première partie, axée sur les produits infinis de fonctions et l'identité d'Euler pour la fonction zêta, permettait de juger les qualités des candidat·e·s en analyse, en particulier leur maîtrise des questions de convergences de suites et séries de fonctions. Il y a avait également une question d'utilisation des séries de Fourier pour le calcul de $\zeta(2)$.

La deuxième partie, autour du problème de Gauss, permettait de tester le savoir faire des candidat·e·s en arithmétique, sans faire appel à des résultats savants. Les deux premières questions étaient plus de nature géométrique et la dernière plus analytique, concernant des comparaisons asymptotiques de séries numériques.

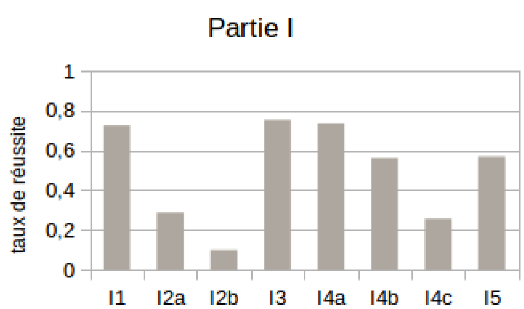
La troisième partie visait à démontrer la formule de Poisson dans $\mathbb{R}^d$, puis pour des réseaux de $\mathbb{R}^d$. L'enjeu de la partie était de montrer des résultats d'analyse en plusieurs variables en se ramenant à des résultats d'analyse connus en une variable. La fin de la partie introduisait la notion de réseau, et abordait la notion de dual, faisant appel à un peu d'algèbre linéaire.

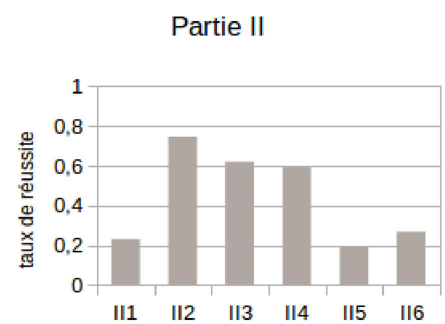
La dernière partie concernait la fonction thêta associée à un réseau, elle permettait principalement de tester les connaissances des candidat·e·s sur les fonctions holomorphes. Une question portait également sur les générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$.

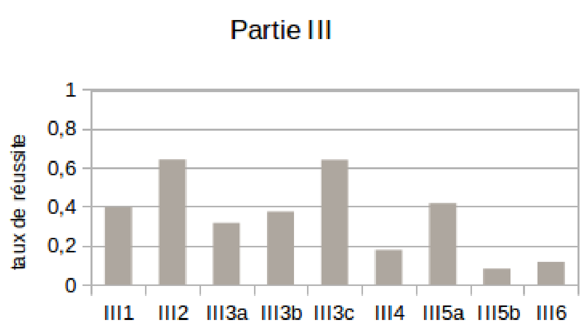
Le sujet était long et varié pour permettre aux candidat·e·s de choisir les parties qu'ils souhaitaient traiter en profondeur (voir les commentaires à ce sujet) ; la partie IV a rarement été abordée.

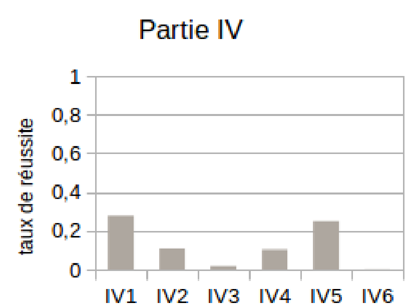
2 Statistiques des résultats

Les diagrammes suivants représentent les taux de réussite question par question.

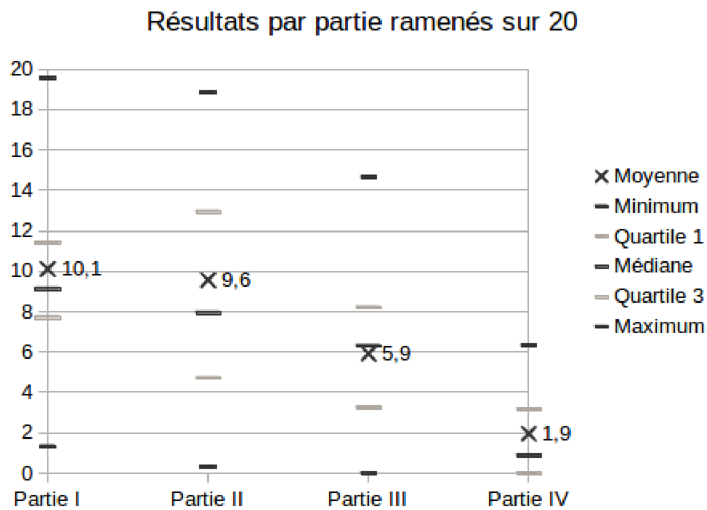


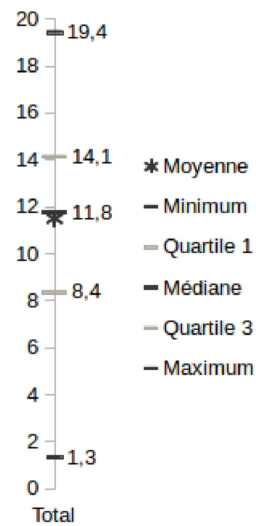






Voici la répartition des résultats partie par partie, puis au total après harmonisation à une moyenne de 11,5 et un écart-type de 4. Sur 55 inscrits, 52 candidat·e·s étaient présent·e·s à l'épreuve.





3 Commentaires des correcteurs

Tout d'abord, les correcteurs tiennent à signaler une erreur de l'énoncé dans la question I2 : il fallait considérer la convergence *uniforme* des produits partiels de fonctions et pas *normale* comme écrit dans l'énoncé, ceci n'ayant pas de sens pour les suites de fonctions. Cela a certainement induit en erreur nombre de candidat·e·s dans la question I2 et l'auteure du sujet s'en excuse. Cependant, les correcteurs estiment que cette erreur d'énoncé ne nuit pas au bon classement final des copies.

Ceci étant dit, globalement sur le sujet, les correcteurs ont noté un nombre important d'imprécisions et de maladresses de rédaction concernant les questions de convergence. En particulier concernant la convergence normale des séries de fonctions, il n'est pas certain que tous les candidat·e·s aient compris que cela équivaut à la convergence d'une série numérique. D'autre part, nombre de candidat·e·s justifient la convergence normale en écrivant que la somme de la série des normes est finie, plutôt qu'en majorant uniformément la fonction par une suite sommable (idem pour montrer l'intégrabilité) : de manière générale beaucoup de questions ont été traitées en manipulant le symbole sommation alors qu'elles ne nécessitaient qu'une manipulation du terme général (ou de l'intégrande).

Quelques rares copies ont traité un nombre important de questions avec la bonne idée et avec concision, mais sans justifier. D'autres copies présentent des rédactions à rallonges (quoique correctes) allant jusqu'à plusieurs pages pour une question. Il s'agit de trouver un compromis de rédaction alliant concision et rigueur.

Attention également, certaines copies abusent de déduction logiques non justifiées pour donner l'illusion de traiter la question.

Les correcteurs ont eu parfois du mal à déchiffrer des copies vraiment brouillon ou parfois juste illisibles et aimeraient mettre en garde à ce sujet les candidat·e·s se destinant à passer l'agrégation.

3.1 Partie I

I1) Cette question a été plutôt bien traitée, il manquait quelque fois des justifications, notamment sur les équivalent de séries à termes positifs.

I2)a) Cette question a posé beaucoup de problèmes aux candidat·e·s , à cause de l'erreur d'énoncé. Beaucoup n'ont pas réussi à majorer la quantité $|P_{N+1}(x) - P_N(x)|$, ou n'ont pas traité la question. Beaucoup d'autres ont montré que la suite des produits partiels des normes convergeait, ce qui ne suffisait pas. Il fallait montrer que la série des $P_{N+1} - P_N$ convergeait normalement sur tout compact, à l'aide d'une majoration soignée, et en déduire que (P_N) était uniformément de Cauchy.

I2)b) Cette question a souvent été mal comprise par les candidat·e·s . Il s'agissait de montrer que le produit $\prod \frac{1}{1+f_n}$ convergeait, soit uniformément en utilisant le critère précédent de la question I2a, soit ponctuellement en utilisant le critère de question I1. Beaucoup de candidat·e·s se sont contenté·e·s de dire que $1 + f_n \neq 0$ pour justifier la convergence stricte. Les candidat·e·s ayant passé la question précédente ont également passé cette question.

I3) Cette question a été généralement bien traitée.

I4)a) Plusieurs rédactions étaient possibles, soient en numérotant les nombres premiers, soit en considérant les nombres premiers plus petits que N, mais dans tous les cas les majorations étaient à faire sur des sommes finies, ce qui n'a pas toujours été le cas.

I4)b) Plusieurs candidat·e·s n'ont pas justifié l'utilisation du développement en série entière (le domaine de convergence), et certain(e)s ont fait les calculs sur des sommes infinies.

I4)c) Il fallait majorer le reste de la série minutieusement. Nombre de candidat·e·s ont commis l'erreur de passer directement à la limite sur l'ensemble $\mathcal{E}(N)$.

I5) Cette question a été globalement bien traitée au niveau des calculs, mais il fallait bien préciser qu'on utilisait Parseval sur une fonction L^2. Les candidat·e·s pouvaient choisir T à leur convenance mais très peu l'ont fait.

3.2 Partie II

Quelques candidat·e·s ont choisi de ne pas aborder du tout cette partie, ou ont abandonné dès la question 1.

II1) Cette question a été étonnement mal traitée. Elle n'était pourtant pas difficile mais moins standard. Beaucoup de candidat·e·s se sont contenté(e)s de faire un dessin sans rien justifier, ou encore ont fait des affirmations fausses. Il s'agissait de relier le nombre de points à une aire (de carrés correspondants), et d'encadrer cette aire par l'aire de deux cercles, de bon rayon (suivant la convention prise sur les carrés associés aux points).

II2) Cette question ne présentait pas de difficulté et a été majoritairement bien traitée.

II3) Les candidat·e·s ayant traité cette question l'ont plutôt bien fait, soit en invoquant des arguments sur les groupes cycliques, soit à l'aide de résultats arithmétiques élémentaires.

II4) Beaucoup de candidat·e·s ont essayé de montrer que $\mu(p^s) = 0$ pour $s \geq 2$ à l'aide de la définition, alors que c'était assez direct en utilisant la question II3.

II5) Il fallait développer un produit fini pour rédiger proprement, peu l'ont fait (mais beaucoup se sont arrêtés sur cette question)

II6) Cette question portait surtout sur des comparaisons asymptotiques en $n \to \infty$. Les candidat·e·s ont souvent bien justifié que $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} = O(\ln(n))$ mais rarement que $\sum_{d \geq n} \frac{1}{d^2} = O(\frac{1}{n})$ (qui nécessitait une comparaison série/intégrale).

3.3 Partie III

III1) Il fallait utiliser Fubini pour se ramener en dimension 1. Avec l'indication, le point clé était de bien justifier la dérivation sous l'intégrale. Quelques candidat·e·s ont tenté de traiter la question à l'aide d'un changement de variable complexe, malheureusement mal justifié.

III2) L'idée clé était que les dérivées de f sont des polynômes fois f, ce qu'il fallait justifier par une petite récurrence. La question ne posait sinon pas de difficultés.

III3)a) Cette question a souvent posé problème aux candidat·e·s . Elle était en effet plus difficile car demandait de se ramener à un résultat de sommation en dimension 1 à l'aide d'une majoration fine. En particulier pour montrer que la somme était $\mathcal{C}^1$ il fallait majorer $|f(\mathbf{x}+\mathbf{n})|$ uniformément sur les compacts, ce qui n'a pas été souvent bien fait. La convergence était ici ponctuelle mais pas uniforme, seulement uniforme sur les compacts.

III3)b) L'interversion somme intégrale n'a pas été toujours ben justifiée.

III3)c) Question sans difficulté, majoritairement bien traitée.

III4) Peu de candidat·e·s ont su trouver une base du réseau dual, il s'agissait probablement de candidat·e·s ayant déjà des connaissances sur la dualité, même si l'indication devait permettre de traiter cette question sans prérequis.

III5)a) Aucune difficulté

III5)b) Certains candidat·e·s on essayé de trouver une base du réseau, hélas, dans ce cas c'est très difficile. Il était plus simple d'utiliser la définition pour montrer que Λ_8 était un réseau et la question III4) pour montrer que $\Lambda_8'' = \Lambda_8$. Une seule copie a traité cette question entièrement.

III6) Peu de copies ont traité cette question, et peu correctement. Le point clé était le changement de variable dans l'intégrale sur $\mathbb{R}^d$.

3.4 Partie IV

Cette partie n'a été que très peu abordée, et souvent juste pour gagner quelques points supplémentaires sur les questions faciles.

IV1) Très peu de candidat·e·s ont correctement montré que la fonction était bien définie et holomorphe. Il fallait en effet utiliser une majoration par une fonction $e^{-\pi a\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$ et justifier que cette fonction est sommable sur $\mathbb{Z}^d$ (car intégrable sur $\mathbb{R}^d$ par exemple).

IV2) Le cas $t = 1$ était trivial, pour se ramener au cas général on devait voir que $(\sqrt{t}\Lambda)' = 1/\sqrt{t}\Lambda'$ ce qui n'a pas souvent été clair.

IV3) Un·e seul·e candidat·e a vu qu'il suffisait d'utiliser le prolongement analytique.

IV4) Les très rares candidat·e·s ayant traité cette question l'ont fait de façon plutôt satisfaisante.

IV5) Cette question était triviale comme beaucoup l'ont remarqué.

IV6) Question presque jamais abordée. L'idée était de montrer (ii) seulement pour les générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$.