Sujet 2 - Analyse numérique

Notations

Les parties 1, 2, 3 et 4 peuvent être traitées de façon indépendante.

On note ici $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions polynômiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, $\mathcal{P} = \cup_{n\geq 0}\mathcal{P}_n$, et $\mathcal{P}_n^+ := \{p_n \in \mathcal{P}_n, \quad p_n(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]\} \subset \mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions polynômiales positives sur $[0,1]$.

Introduction

Le problème classique d'interpolation d'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ consiste, étant donnés des points $\xi_0 < \cdots < \xi_n$ de $[0,1]$, à trouver un élément de $\mathcal{P}_n$ vérifiant $p_n(\xi_i) = f(\xi_i)$ pour $0 \leq i \leq n$. Il existe un unique polynôme répondant à ces conditions, appelé polynôme d'interpolation de Lagrange. La partie 1 de ce problème s'intéresse à ce résultat classique.

On peut alors se poser la question suivante : si la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0,1]$, est-il possible de trouver des points $(\xi_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que le polynôme d'interpolation de Lagrange en ces points soit positif sur $[0,1]$? Ce problème étant difficile à traiter, on s'intéressera ici à une interpolation par morceaux de f sur des sous-intervalles de taille h, avec $0 < h \leq 1$. On se ramène alors à interpoler la fonction $f_h(x) := f(hx)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Le problème considéré ici (traité dans la partie 4) s'écrit alors de la façon suivante

Problème 1. *Trouver $h_0 \in]0,1]$ tel que pour tout $h \in [0,h_0]$ il existe $n+1$ points d'interpolation $0 \leq \xi_0 < \cdots < \xi_n \leq 1$ tels que le polynôme interpolation de Lagrange de $f_h : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ en ces points vérifie : $p_n \in \mathcal{P}_n^+$.*

La méthode développée ici repose sur une caractérisation des polynômes positifs sur $[0,1]$, donnée par le Théorème de Lukács.

Théorème 1 (Lukács). *Soit $p_n \in \mathcal{P}_n$.*

- *Si $n = 2m$, alors $p_n \in \mathcal{P}_n^+$ si et seulement si p_n peut s'écrire sous la forme*

$$p_n(x) = a_m(x)^2 + x(1-x)b_{m-1}(x)^2, \tag{1}$$

  avec $a_m \in \mathcal{P}_m$ et $b_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1}$.

- *Si $n = 2m+1$, alors $p_n \in \mathcal{P}_n^+$ si et seulement si p_n peut s'écrire sous la forme*

$$p_n(x) = xa_m(x)^2 + (1-x)b_m(x)^2, \tag{2}$$

  avec $a_m \in \mathcal{P}_m$ et $b_m \in \mathcal{P}_m$.

Il est clair que les polynômes de la forme (1) ou (2) sont bien dans $\mathcal{P}_n^+$. La partie 2 de ce problème s'intéresse à montrer la réciproque.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

1 Préliminaire : interpolation d'une fonction

On considère ici une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, et $0 \leq \xi_0 < \cdots < \xi_n \leq 1$ $n+1$ points deux à deux distincts de $[0,1]$.

1. Prouver l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange $p_n \in \mathcal{P}_n$ de f en $\xi_0, \ldots, \xi_n$, c'est-à-dire vérifiant $p_n(\xi_i) = f(\xi_i)$ pour $0 \leq i \leq n$.

2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]0,1[$. Soit $x \in [0,1]$ fixé. Montrer qu'il existe $y_x \in]0,1[$ (dépendant de x) tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - \xi_i).$$

   Indication : on pourra considérer la fonction $g(t) = f(t) - p_n(t) - \mu_x \prod_{i=0}^{n}(t - \xi_i)$, *où la constante* μ_x *est choisie de façon à avoir* $g(x) = 0$.

3. On note q_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f_h en $\xi_0, \ldots, \xi_n$. Déduire de la question précédente une estimation de $\|f_h - p_n\|_\infty$ dépendant de h, de n et de $M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f^{(n+1)}(x)|$.

4. On prend ici $n = 2$, $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = (0, 1/2, 1)$. Exhiber une fonction f positive sur $[0,1]$ telle que son polynôme d'interpolation de Lagrange $p \in \mathcal{P}_2$ en ξ_0, ξ_1, ξ_2, ne soit pas dans $\mathcal{P}_2^+$.
   Indication : on pourra commencer par trouver un polynôme p *tel que* $p(0) > 0$, $p(\frac{1}{2}) > 0$, $p(1) > 0$ *mais négatif sur un sous intervalle de* $[0,1]$, *et contruire ensuite* f.

2 Une preuve du Théorème de Lukács

On s'intéresse ici à démontrer le Théorème 1.

5. Prouver le Théorème 1 pour $n = 1$.

6. Cas $n = 2$. Soit $p_2 \in \mathcal{P}_2^+$
   (a) Montrer que dans le cas où p_2 s'annule en 0 ou 1 on peut écrire p_2 comme produit de deux éléments de $\mathcal{P}_1$ et en déduire qu'il peut se mettre sous la forme (1).
   (b) On se place maintenant dans le cas où $p_2(0)p_2(1) > 0$. On va montrer que p_2 peut se mettre sous la forme $p_2(x) = a_1(x)^2 + x(1-x)b_0^2$, avec $b_0 \in \mathbb{R}$ et $a_1 \in \mathcal{P}_1$ qui change de signe sur $]0,1[$.
      i. On suppose que p_2 puisse se mettre sous une telle forme. Exprimer dans ce cas $a_1(x)^2$ en fonction de $\sqrt{p_2(0)}$ et $\sqrt{p_2(1)}$, et b_0 en fonction de x^* et $p_2(x^*)$, où x^* est un point de $]0,1[$ bien choisi.
      ii. Conclure.

7. On suppose n pair, $n = 2m$. Soit $p_n \in \mathcal{P}_n^+$.
   (a) Prouver que $p_n \in \mathcal{P}_n^+$ peut s'écrire sous la forme $p_n = \prod_{k=1}^{m} q_k$, avec $q_k \in \mathcal{P}_2^+$.
   (b) En déduire que p_n peut s'écrire sous la forme (1).
   Indication : on pourra écrire $q_k \in \mathcal{P}_2^+$ *comme le module au carré d'une fonction à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

8. Déduire du cas précédent le résultat dans le cas où n est impair.
   Indication : on peut remarquer que si $p_n \in \mathcal{P}_{2m+1}^+$, *alors* $xp_n \in \mathcal{P}_{2m+2}^+$.

3 Interpolation dans $\mathcal{P}_3^+$

Étant donnée une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$, le but de cette section est de montrer l'existence de deux réels distincts $\alpha^*, \beta^* \in (0,1)$ tels que le polynôme p_3 d'interpolation de f en $0, \alpha^*, \beta^*, 1$ soit positif. On fait dans toute la suite les hypothèses suivantes

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1] \tag{3}$$

$$\inf_{x\in[0,1]} f(x) > 0. \tag{4}$$

9. On considère deux réels distincts $\alpha^*, \beta^* \in (0,1)$, avec $\alpha^* < \beta^*$, une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$ et $p_3 \in \mathcal{P}_3$ son polynôme d'interpolation en $0, \alpha^*, \beta^*, 1$. On suppose que p_3 est positif et, grâce au théorème de Lukacs, on l'écrit

$$p_3(x) = xa_1(x)^2 + (1-x)b_1(x)^2 \qquad \text{avec } a_1 \in \mathcal{P}_1,\ b_1 \in \mathcal{P}_1.$$

   (a) Montrer que $a_1(\beta^*) = b_1(\alpha^*) = 0$ si et seulement si

   $$\frac{a_1(1)}{1-\beta^*} = \frac{-a_1(\alpha^*)}{\beta^*-\alpha^*} \qquad \text{et} \qquad \frac{b_1(\beta^*)}{\beta^*-\alpha^*} = \frac{-b_1(0)}{\alpha^*}.$$

   A partir de maintenant et jusqu'à la fin de la question 9, on suppose que $a_1(\beta^*) = b_1(\alpha^*) = 0$, a_1 est croissante et b_1 est décroissante.

   (b) Montrer que $a_1(\alpha^*) < 0$, $a_1(1) > 0$, $b_1(0) > 0$, $b_1(\beta^*) < 0$.

   (c) Déterminer $a_1(\alpha^*), a_1(1), b_1(0), b_1(\beta^*)$ en fonction de α^*, β^* et des valeurs de f en $0, \alpha^*, \beta^*, 1$.

   (d) En déduire que (α^*, β^*) vérifie le système

   $$(\Sigma) : \quad \alpha^* = K(\beta^*, \theta(\beta^*)), \qquad \beta^* = 1 - K(1-\alpha^*, \eta(\alpha^*))$$

   où avec $K(z,r) := \frac{z\sqrt{1-z}}{r+\sqrt{1-z}}$, θ et η des fonctions dépendant de f que l'on précisera.

   (e) Montrer que le système (Σ) est équivalent au système

   $$(\Sigma') : \quad F(\alpha^*) = 0, \qquad \beta^* = \psi(\alpha^*),$$

   où F est une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, vérifiant $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$. On explicitera les fonctions F et ψ en fonction de K et f.

10. On considère les fonctions K et F introduites aux questions 9d et 9e.

   (a) Montrer que $F'(x)$ est négative au voisinage de 0^+.

   (b) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ et pour tout $r > 0$, $0 < K(x,r) < x$.

   (c) En déduire que le système (Σ') possède au moins une solution (α^*, β^*) dans $]0,1[^2$, vérifiant $\alpha^* < \beta^*$.

   (d) Conclure.

4 Interpolation dans $\mathcal{P}_n^+$

Cette partie s'intéresse à la problématique annoncée dans le Problème 1. On fait ici encore les Hypothèses (3) et (4) sur la fonction f. On se limite à étudier le cas d'un entier n impair : $n = 2m+1$.

4.1 Étude du cas $f_h = 1$

Dans cette partie on s'intéresse au cas d'une fonction f constante (prise ici égale à 1).
Pour $m \geq 0$ on définit les fonctions T_m et U_m sur $[-1,1]$ par les relations

$$T_m(\cos(\theta)) = \cos(m\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}; \qquad \text{et} \qquad U_m(\cos(\theta)) = \frac{\sin(m\theta)}{\sin(\theta)} \quad \forall \theta \notin \pi\mathbb{Z}, \tag{5}$$

en prolongeant $U_m(x)$ par continuité en $x = -1$ et $x = 1$.

11. On montre dans cette question que les fonctions T_m et U_m sont polynomiales sur $[-1,1]$.
    (a) Établir une relation de récurrence liant T_{m+1}, T_m, et T_{m-1}.
    (b) En déduire que $T_m \in \mathcal{P}_m$.
    (c) De façon similaire, prouver que $U_m \in \mathcal{P}_{m-1}$.

On pose, pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} \underline{a}_m(x) = T_m(2x-1) - 2(1-x)U_m(2x-1), \\ \underline{b}_m(x) = T_m(2x-1) + 2xU_m(2x-1). \end{cases}$$

12. Montrer que
$$x\underline{a}_m(x)^2 + (1-x)\underline{b}_m(x)^2 = 1, \qquad \forall x \in [0,1]. \tag{6}$$
Indication : pour $x \in [0,1]$ on pourra introduire l'angle $\theta \in [0,\pi]$ tel que $2x-1 = \cos(\theta)$.

13. On s'intéresse ici aux racines de $\underline{a}_m$ et $\underline{b}_m$.
    (a) Montrer que pour $x \in]0,1]$, $\underline{a}_m(x)$ peut s'écrire
    $$\underline{a}_m(x) = \frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2}\theta\right)}{\cos(\frac{\theta}{2})}, \qquad \text{où } \theta = \arccos(2x-1).$$
    (b) En déduire que $\underline{a}_m$ a m racines réelles dans $]0,1[$, que l'on exprimera.
    (c) Montrer de façon similaire que $\underline{b}_m$ a m racines réelles dans $]0,1[$, que l'on exprimera.
    (d) Montrer que les racines de $\underline{a}_m$, notées $\underline{\beta}_1, \ldots, \underline{\beta}_m$, et les racines de $\underline{b}_m$, notées $\underline{\alpha}_0, \ldots, \underline{\alpha}_{m-1}$, possèdent la propriété d'entrelacement suivante
    $$0 < \underline{\alpha}_0 < \underline{\beta}_1 < \cdots < \underline{\beta}_m < 1. \tag{7}$$

14. On pose $\underline{\beta}_0 = 0$ et $\underline{\alpha}_m = 1$. Montrer que l'on a
$$\underline{a}_m(\underline{\alpha}_i) = \frac{(-1)^{i+m}}{\sqrt{\underline{\alpha}_i}}, \qquad \underline{b}_m(\underline{\beta}_i) = \frac{(-1)^{i+m}}{\sqrt{1-\underline{\beta}_i}} \qquad \text{pour } i \in \{0,\ldots,m\},$$
$$\underline{a}'_m(\underline{\alpha}_i) = \frac{(-1)^{i+m+1}}{2\underline{\alpha}_i^{3/2}} \qquad \text{pour } i \in \{0,\ldots,m-1\},$$
$$\underline{b}'_m(\underline{\beta}_i) = \frac{(-1)^{i+m}}{2(1-\underline{\beta}_i)^{3/2}} \qquad \text{pour } i \in \{1,\ldots,m\}.$$

4.2 Cas général d'une fonction f_h vérifiant (3) et (4)

Soit $I_m = \{(x_1, \dots x_m) \subset]0,1[^m,\ 0 < x_1 < \dots < x_m < 1\}$; pour

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1};\ \beta_1, \dots, \beta_m) \in I_m^2,$$

$\beta_0 = 0$, $\alpha_m = 1$, et $h \in [0,1]$, on définit $a_{m,h}[\alpha]$ comme l'unique polynôme de $\mathcal{P}_m$ vérifiant

$$a_{m,h}[\alpha](\alpha_i) = (-1)^{i+m}\sqrt{\frac{f_h(\alpha_i)}{\alpha_i}} \qquad \text{pour } 0 \le i \le m$$

et $b_{m,h}[\beta]$ l'unique polynôme de $\mathcal{P}_m$ vérifiant

$$b_{m,h}[\beta](\beta_i) = (-1)^{i+m}\sqrt{\frac{f_h(\beta_i)}{1-\beta_i}} \qquad \text{pour } 0 \le i \le m$$

ainsi que l'application $\Theta_{m,h} : I_m^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$

$$\Theta_{m,h}(\alpha, \beta) = (b_{m,h}[\beta](\alpha_0), \dots, b_{m,h}[\beta](\alpha_{m-1}), a_{m,h}[\alpha](\beta_1), \dots, a_{m,h}[\alpha](\beta_m))\,. \tag{8}$$

15. Montrer qu'il suffit de déterminer $(\alpha, \beta) \in I_m^2$ vérifiant

$$\Theta_{m,h}(\alpha, \beta) = 0 \tag{9}$$

pour obtenir un polyôme de $\mathcal{P}_n^+$ interpolant f_h en $n+1$ points distincts.

16. Montrer que

$$a_{m,0}[\underline{\alpha}] = \sqrt{f(0)}\underline{a}_m, \qquad b_{m,0}[\underline{\beta}] = \sqrt{f(0)}\underline{b}_m, \qquad \text{et} \qquad \Theta_{m,0}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = 0,$$

où $\underline{a}_m$, $\underline{b}_m$, $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ ont été introduit dans la partie 4.1.

17. Soit $(\alpha, \beta) \in I_m^2$. On souhaite ici démontrer l'inversibilité de la matrice jacobienne de $\Theta_{m,h}$ évaluée au point $X := (\alpha, \beta)$, notée $J_{\Theta_{m,h}}(X)$. On considère la décomposition par bloc de $J_{\Theta_{m,0}}(\alpha, \beta)$

$$J_{\Theta_{m,0}}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} D_1(\alpha, \beta) & M_1(\alpha, \beta) \\ M_2(\alpha, \beta) & D_2(\alpha, \beta) \end{pmatrix}$$

où $D_1(\alpha, \beta)$, $D_2(\alpha, \beta)$, $M_1(\alpha, \beta)$, $M_2(\alpha, \beta)$ sont des éléments de $\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $D_1(\alpha, \beta)$ et $D_2(\alpha, \beta)$ sont des matrices diagonales inversibles.

   (b) On souhaite ici montrer que $M_1(\alpha, \beta)$ et $M_2(\alpha, \beta)$ sont nulles. Pour $x \in [0,1]$ et $\alpha_0 \in I_m$, on introduit

$$q(x, \alpha_0) := a_{m,0}[(\alpha_0, \underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_{m-1})](x) - a_{m,0}[(\underline{\alpha}_0, \underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_{m-1})](x).$$

      i. Montrer que $q(x, \alpha_0)$ peut s'écrire sous la forme

$$q(x, \alpha_0) = \frac{\sqrt{f(0)}}{\prod_{1 \le i \le m}(\alpha_0 - \underline{\alpha}_i)} \left((-1)^m \sqrt{\frac{1}{\alpha_0}} - \underline{a}_m(\alpha_0) \right) \prod_{1 \le i \le m} (x - \underline{\alpha}_i).$$

      ii. En déduire que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left(a_{m,0}[\alpha](x) \right)\Big|_{\alpha = \underline{\alpha}} = 0 \qquad \forall x \in [0,1].$$

      iii. Conclure.

(c) En déduire que $J_{\Theta_{m,0}}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est inversible.

18. On note Γ la fonction définie sur $[0,1] \times I_m^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2m}$ définie par

$$\Gamma(h, X) = \Theta_{m,h}(X).$$

Montrer que Γ peut être prolongée par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J \times I_m^2$, où J est un ouvert contenant $[0,1]$.

19. Conclure la résolution du Problème 1.

Fin du sujet 2