Sujet 1 : Probabilités et Statistique

Nous étudions ici une classe de processus avec renforcement, définie de manière informelle de la façon suivante : à l'instant $n = 0$, une urne contient v boules vertes et r boules rouges (avec $v \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$). Conditionnellement à la composition de l'urne à l'instant $n \geqslant 0$, on tire à l'instant $n+1$ une boule uniformément au hasard parmi les boules présentes, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne. On ajoute alors dans l'urne $a \geqslant 0$ boules de la couleur tirée et $b \geqslant 0$ boules de la couleur opposée.

On note $Y_n \in \{0, \dots, n\}$ (resp. $Z_n \in \{0, \dots, n\}$) le nombre total de boules vertes (resp. rouges) tirées au cours des n premiers tirages. Ainsi, on a l'égalité $Y_n + Z_n = n$. De cette manière, le nombre total de boules vertes ajoutées dans l'urne après n tirages est égal à $aY_n + bZ_n$ et le nombre total de boules présentes dans l'urne est $v + r + n(a+b)$.

Définissons plus précisément le processus étudié : soit $(U_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ la filtration engendrée par la suite $(U_n)_{n \geqslant 1}$: $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{F}_n := \sigma(U_1, \dots, U_n)$. On définit les suites $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ et $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ par $Y_0 = 0$ et $Z_0 = 0$ et pour $n \geqslant 0$,

$$(Y_{n+1}, Z_{n+1}) = \begin{cases} (Y_n + 1, Z_n) & \text{si } U_{n+1} \leqslant V_n, \\ (Y_n, Z_n + 1) & \text{si } U_{n+1} > V_n, \end{cases} \tag{1}$$

où

$$V_n := \frac{v + aY_n + bZ_n}{v + r + n(a+b)}. \tag{2}$$

Ici, V_n représente la proportion de boules vertes dans l'urne après le tirage n. On notera $R_n = 1 - V_n$ la proportion de boules rouges. Enfin, on notera, pour $n \geqslant 1$

$$\xi_n = \mathbf{1}_{\{U_n \leqslant V_{n-1}\}} \in \{0,1\} \tag{3}$$

la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée au $n$ième tirage est verte et 0 sinon.

Le but de ce sujet est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $(V_n)_{n \geqslant 0}$ quand $n \to \infty$. La Partie 1 concerne des résultats préliminaires sur la suite $(V_n)_{n \geqslant 0}$. La Partie 2 étudie le cas particulier où $b > 0$ et les deux suivantes (Parties 3 et 4) s'intéressent au cas $b = 0$. La Partie 2 est indépendante des Parties 3 et 4. La Partie 4 utilise les résultats de la Partie 3, qu'il est possible d'admettre sans démonstration si nécessaire.

Rappels :

On rappelle la définition suivante : la fonction Γ étant définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$, alors pour tout $\alpha, \beta > 0$, la fonction

$$u \mapsto \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\alpha - 1} (1-u)^{\beta - 1} \mathbf{1}_{[0,1]}(u)$$

définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. La loi correspondante est appelée loi Beta(α, β). De plus, si X est de loi Beta(α, β), X admet des moments de tous ordres et on a, pour $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}(X^k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha + j}{\alpha + \beta + j}.$$

De plus, on rappelle le résultat d'existence suivant : pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, croissante, continue à droite telle que $F(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $F(x) = 1$ pour $x \geqslant 1$, il existe une unique loi de probabilité μ sur $[0,1]$ dont F est la fonction de répartition : $F(x) = \mu(]-\infty, x])$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1 Quelques observations préliminaires

1. Calculer V_n pour $n \geqslant 1$ dans le cas $a = b \geqslant 1$. Que vaut $\lim_{n\to\infty} V_n$ dans ce cas ?

On suppose dorénavant dans toute la suite du sujet que $a \neq b$.

2. Montrer que, pour $n \geqslant 0$, $V_{n+1} = \frac{(v+r+n(a+b))V_n + a\mathbf{1}_{\{U_{n+1} \leqslant V_n\}} + b\mathbf{1}_{\{U_{n+1} > V_n\}}}{v+r+(n+1)(a+b)}$.
3. Montrer que pour $n \geqslant 0$, $\mathbb{E}\left(V_{n+1} | \mathcal{F}_n\right) = \frac{(v+r+(n+1)a+(n-1)b)V_n + b}{v+r+(n+1)(a+b)}$.
4. En déduire que $(V_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ si et seulement si $b = 0$. *On pourra pour cela distinguer les cas $v \neq r$ (et considérer V_0) et $v = r$ (et considérer V_1).*
5. On suppose dans cette question que $b = 0$.
   a) Montrer dans ce cas l'existence d'une variable aléatoire V_∞ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $(V_n)_{n \geqslant 0}$ converge, pour $n \to \infty$, vers V_∞ presque sûrement et dans L^p pour tout $p \geqslant 1$.
   b) Calculer $\mathbb{E}\left(V_\infty\right)$.

2 Le modèle des urnes de Friedman

Le modèle de Friedman correspond au cas particulier où $b > 0$. Le but de cette partie est de montrer que, dans ce cas, quelles que soient les valeurs de $a \geqslant 0$ et $b > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{2}, \quad \text{presque sûrement.} \tag{4}$$

Cette partie se décompose en deux sous-parties : la première (§ 2.1) concerne un résultat général de convergence de martingales et la seconde (§ 2.2) applique ces résultats au cas du modèle de Friedman.

2.1 Un résultat général sur la convergence de martingales

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \geqslant 0}$. On se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 0}$ adaptée à $(\mathcal{G}_n)_{n \geqslant 0}$. On suppose que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale pour $(\mathcal{G}_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $X_0 = 0$ et $\mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 0$.

On rappelle ici l'inégalité maximale de Doob : pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\left(\max_{0 \leqslant m \leqslant n} |X_m|^2\right) \leqslant 4\mathbb{E}\left(X_n^2\right),$$

ainsi que le Théorème de décomposition de Doob : $\left(X_n^2\right)_{n \geqslant 0}$ est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \geqslant 0}$ qui peut s'écrire de façon unique comme $X_n^2 = M_n + A_n$, où $M_0 = A_0 = 0$, $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{G}_n)_{n \geqslant 0}$ et où $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est un processus croissant s'écrivant explicitement sous la forme

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left(X_m^2 | \mathcal{G}_{m-1}\right) - X_{m-1}^2\right) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left((X_m - X_{m-1})^2 | \mathcal{G}_{m-1}\right), \ (n \geqslant 1).$$

On note de plus $A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n$.

1. a) Montrer que $\mathbb{E}\left(\sup_{n \geqslant 0} |X_n|^2\right) \leqslant 4\mathbb{E}(A_\infty)$.
   b) Soit $C > 0$. Montrer que $N := \inf\{n \geqslant 0, \ A_{n+1} > C\}$ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \geqslant 0}$.
   c) Déduire de ce qui précède l'inégalité suivante : $\mathbb{E}\left(\sup_{n \geqslant 0} |X_{n\wedge N}|^2\right) \leqslant 4C$.
   d) Montrer que la suite $(X_{n\wedge N})_{n \geqslant 0}$ converge, pour $n \to \infty$, presque sûrement et dans L^2 vers une limite finie presque sûrement.
   e) En déduire que, sur l'événement $\{A_\infty < +\infty\}$, $\lim_{n\to\infty} X_n$ existe et est finie presque sûrement.

On s'intéresse maintenant au comportement de la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sur l'événement $\{A_\infty = +\infty\}$: soit $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ une fonction croissante telle que $\int_0^\infty f(t)^{-2} \mathrm{d}t < \infty$.

2. a) Montrer que le processus défini par $Y_0 = 0$ et $Y_n := \sum_{m=1}^n \frac{X_m - X_{m-1}}{f(A_m)}$, $n \geqslant 1$, est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \geqslant 0}$.
   b) Soit $(B_n)_{n \geqslant 0}$ le processus croissant associé à la décomposition de Doob de $\left(Y_n^2\right)_{n \geqslant 0}$. Montrer que pour $n \geqslant 0$, $B_{n+1} - B_n = \frac{A_{n+1} - A_n}{f(A_{n+1})^2}$.
   c) Par un argument de comparaison à une intégrale, montrer que la série de terme général $\frac{A_{n+1} - A_n}{f(A_{n+1})^2}$ converge.
   d) En déduire que $B_\infty < +\infty$, puis que $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Y_\infty$ presque sûrement.
   e) Conclure que $X_n / f(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ presque sûrement sur l'événement $\{A_\infty = +\infty\}$.
   On rappelle ici le lemme de Kronecker : pour toutes suites numériques (a_n) et (x_n) telles que (a_n) est croissante, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et la série $\sum \frac{x_n}{a_n}$ est convergente, alors $a_n^{-1} \sum_{m=1}^n x_m \to 0$ quand $n \to \infty$.

2.2 Application aux urnes de Friedman

Revenons au cas du modèle de Friedman (on rappelle en particulier la définition (3) de ξ_n). Définissons $X_0 = 0$ et pour $n \geqslant 0$, $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1} - V_n$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$.

2. Soit $(A_n)_{n \geqslant 0}$ le processus croissant associé à la décomposition de Doob de $\left(X_n^2\right)_{n \geqslant 0}$. Montrer que, pour $n \geqslant 0$, $A_{n+1} - A_n = V_n(1 - V_n)$.
3. Montrer que, presque sûrement, $\sum_{m=0}^{\infty} V_m = +\infty$.
4. a) Montrer que sur l'événement $\{A_\infty < +\infty\}$, on a $\frac{X_n}{\sum_{m=0}^{n-1} V_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, presque sûrement.
   b) Montrer que sur l'événement $\{A_\infty = +\infty\}$, on a $\frac{X_n}{\max(A_n,1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, puis que $\frac{X_n}{\sum_{m=0}^{n-1} V_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, presque sûrement.
   c) En remarquant que $Y_n = \sum_{m=1}^{n} \xi_m$, conclure que

$$\frac{Y_n}{\sum_{m=0}^{n-1} V_m} \to 1, \quad \text{pour } n \to \infty, \text{ presque sûrement.}$$

5. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle et $b_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

6. Déduire de tout ce qui précède que si pour $x \in \mathbb{R}$, $\limsup_{n\to\infty} V_n \leqslant x$ presque sûrement, alors $\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} \leqslant x$ presque sûrement.
7. On suppose dans cette question que $a > b$.
   a) En remarquant que $V_n = \frac{v+bn+(a-b)Y_n}{v+r+n(a+b)}$, en déduire que si, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\limsup_{n\to\infty} V_n \leqslant x$ presque sûrement, alors $\limsup_{n\to\infty} V_n \leqslant \rho(x) := \frac{b+(a-b)x}{a+b}$, presque sûrement.
   b) Conclure que $\limsup_{n\to\infty} V_n \leqslant \frac{1}{2}$.
   c) Montrer (4) dans le cas $a > b$.
8. On suppose maintenant $a < b$.
   a) Montrer que pour $n \geqslant 0$, $R_n = \frac{r+an+(b-a)Y_n}{v+r+n(a+b)}$.
   b) Montrer que si, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\limsup_{n\to\infty} V_n \leqslant x$ et $\limsup_{n\to\infty} R_n \leqslant y$ presque sûrement, alors, presque sûrement

$$\limsup_{n\to\infty} V_n \leqslant \frac{a+(b-a)y}{a+b} \text{ et } \limsup_{n\to\infty} R_n \leqslant \frac{a+(b-a)x}{a+b}.$$

   c) En déduire (4) dans le cas $a < b$.

3 A propos de variables aléatoires échangeables

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite infinie de variables aléatoires, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est échangeable si pour tout $n \geqslant 1$, pour toute permutation π de l'ensemble des indices $\{1, \ldots, n\}$, la loi du n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ est la même que celle de $(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Pour toute suite infinie de variables aléatoires* $(X_i)_{i \geqslant 1}$ *échangeable et prenant ses valeurs dans* $\{0,1\}$*, il existe une unique loi de probabilité* μ *sur* $[0,1]$ *telle que, pour tout* $n \geqslant 1$*, pour tout* $k = 0, \dots, n$*,*

$$\mathbb{P}\left(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0\right) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \mu(\mathrm{d}x). \tag{5}$$

De plus, si $S_n = X_1 + \dots, X_n$*, pour tout* $k = 0, \dots, n$

$$\mathbb{P}\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \mu(\mathrm{d}x). \tag{6}$$

1. Un exemple : soit Θ variable aléatoire de loi ν sur $[0,1]$. Soit $(U_i)_{i \geqslant 1}$ suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendantes de Θ. Posons pour $i \geqslant 1$, $X_i = \mathbf{1}_{\{U_i \leqslant \Theta\}}$. Montrer que $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est échangeable (on identifiera en particulier la loi μ). A quel cas correspond le cas où $\nu = \mathrm{Dirac}(p)$ avec $p \in [0,1]$?
2. Montrer que l'égalité (6) est une conséquence directe de (5).

3.1 Un problème de moments

3. Soit u une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in [0,1]$, $n \geqslant 1$, soit $P_{n,x}$ la loi de la variable aléatoire $\frac{X}{n}$, où X suit une loi binomiale de paramètres (x,n). On définit

$$B_{n,u}(x) := \sum_{k=0}^{n} u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \int_0^1 u(\theta) P_{n,x}(\mathrm{d}\theta).$$

   a) Montrer que pour tout $\delta > 0$, $P_{n,x}\left([0,1] \setminus [x-\delta, x+\delta]\right) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$.

   b) En déduire que le polynôme $B_{n,u}$ converge uniformément vers u sur $[0,1]$.

4. Pour toute suite $a := (a_i)_{i \geqslant 0}$ de réels, on définit la suite Δa par

$$(\Delta a)_i = a_{i+1} - a_i, \ i \geqslant 0,$$

   ainsi que les itérées successives de Δ définies récursivement par :

$$(\Delta^0 a)_i = a_i, \text{ et } (\Delta^{r+1} a)_i = (\Delta(\Delta^r a))_i, \ i \geqslant 0, \ r \geqslant 0.$$

   a) Prouver par récurrence sur $r \geqslant 0$ la formule suivante :

$$(\Delta^r a)_i = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} a_{i+j}, \ i \geqslant 0.$$

   b) Soient deux suites $a = (a_i)_{i \geqslant 0}$ et $b = (b_j)_{j \geqslant 0}$. Montrer la formule d'inversion suivante :

$$\sum_{r=0}^{p} b_r \binom{p}{r} (\Delta^r a)_i = \sum_{j=0}^{p} a_{i+j} \binom{p}{j} (-1)^{p-j} (\Delta^{p-j} b)_j.$$

Définition 2. *Soit $b = (b_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de réels. On dit que la suite b est complètement monotone si pour tout $r \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $(-1)^r(\Delta^r b)_k \geqslant 0$.*

5. Soit μ une loi de probabilité sur $[0,1]$, X de loi μ et pour $k \geqslant 0$, $b_k = \int_0^1 x^k \mu(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}(X^k)$ son moment d'ordre k. Montrer que $(b_k)_{k \geqslant 0}$ est complètement monotone avec $b_0 = 1$.

Etudions maintenant la réciproque : soit $(b_k)_{k \geqslant 0}$ une suite complètement monotone avec $b_0 = 1$. Il s'agit de montrer l'existence d'une unique loi μ sur $[0,1]$ dont $(b_k)_{k \geqslant 0}$ est la suite des moments.

6. Si μ est une loi de probabilité sur $[0,1]$ dont les moments sont donnés par $(b_k)_{k \geqslant 0}$, montrer alors que la fonction caractéristique de μ, $\varphi_\mu(t) = \int_0^1 e^{itx}\mu(\mathrm{d}x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et calculer son développement en fonction des $(b_k)_{k \geqslant 0}$. Conclure sur l'unicité d'une telle loi μ.

7. Pour tout $n \geqslant 1$, définissons la suite $(p_j^{(n)})_{j=0,\ldots,n}$ par
$$p_j^{(n)} = \binom{n}{j}(-1)^{n-j}(\Delta^{n-j}b)_j,\ j = 0, \ldots, n.$$
   a) Montrer que pour toute suite $(a_j)_{j=0,\ldots,n}$,
$$\sum_{j=0}^n a_j p_j^{(n)} = \sum_{r=0}^n b_r \binom{n}{r}(\Delta^r a)_0.$$
   b) Définissant $\mu_n\left(\left\{\frac{j}{n}\right\}\right) := p_j^{(n)}$ pour $j = 0, \ldots, n$, montrer que μ_n ainsi construite est une probabilité sur $[0,1]$ telle que pour toute fonction u continue sur $[0,1]$,
$$\int_0^1 u(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \sum_{r=0}^n b_r \binom{n}{r}(\Delta^r u^{(n)})_0,$$
   où
$$u_k^{(n)} := u\left(\frac{k}{n}\right),\ k = 0, \ldots, n,\ n \geqslant 1.$$

8. a) Montrer que si la suite a est polynomiale de degré $p \geqslant 1$ (i.e. de la forme $a_i = c_p i^p + c_{p-1}i^{p-1} + \ldots + c_0$ pour tout $i \geqslant 0$) alors $\Delta^r a$ est polynomiale de degré $p-r$ si $p \geqslant r$, de coefficient dominant $c_p p(p-1)\ldots(p-r+1)$ et est nulle si $p < r$.
   b) En déduire que pour $p \geqslant 1$ et $u(x) = x^p$, $\int_0^1 x^p \mu_n(\mathrm{d}x)$ admet une limite pour $n \to \infty$, égale à b_p.
   c) Montrer que pour toute fonction continue $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\int_0^1 u(x)\mu_n(\mathrm{d}x)$ admet une limite quand $n \to \infty$. On notera cette limite $E(u)$.

9. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, définissons $u_{t,\varepsilon}$ la fonction continue qui vaut 1 sur $]-\infty, t]$, 0 sur $]t+\varepsilon, +\infty[$ et linéaire entre t et $t+\varepsilon$. Notons $U_{t,\varepsilon} = E(u_{t,\varepsilon})$.
   a) Vérifier que pour $s < t$, $\|u_{t,\varepsilon} - u_{s,\varepsilon}\|_\infty \leqslant \frac{t-s}{\varepsilon}$. En déduire que $t \mapsto U_{t,\varepsilon}$ est une fonction continue et croissante. Montrer de plus que pour t fixé, $\varepsilon \mapsto U_{t,\varepsilon}$ décroit quand ε décroit vers 0.

b) En déduire l'existence d'une fonction $t \mapsto F(t)$, croissante de 0 à 1, continue à droite, telle que $U_{t,\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} F(t)$ pour tout t.

c) Si F_n est la fonction de répartition de μ_n, montrer que pour tout $\delta > \varepsilon$,

$$\int_0^1 u_{t-\delta,\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \leqslant F_n(t) \leqslant \int_0^1 u_{t,\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)$$

En déduire qu'en tout point t de continuité de F, on a $F_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} F(t)$.

10. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$,

$$\int_0^1 x^p \mu_n(\mathrm{d}x) = 1 - p \int_0^1 x^{p-1} F_n(x)\mathrm{d}x.$$

11. Conclure sur l'existence d'une loi de probabilité μ sur $[0,1]$ dont les moments sont donnés par $(b_k)_{k \geqslant 0}$.

3.2 Preuve du Théorème 1

Fixons une suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ échangeable à valeurs dans $\{0,1\}$. Pour tout $n \geqslant 1$, $k = 0, \ldots, n$, posons

$$p_{k,n} := \mathbb{P}\left(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0\right)$$

et définissons $b_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = p_{n,n} = \mathbb{P}\left(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1\right)$.

12. (a) Montrer l'égalité, pour $n \geqslant 1$

$$p_{n-1,n} = p_{n-1,n-1} - p_{n,n} = -(\Delta b)_{n-1}.$$

puis

$$p_{n-2,n} = p_{n-2,n-1} - p_{n-1,n} = (\Delta^2 b)_{n-2}\,.$$

(b) Plus généralement, montrer que pour tout $k = 0, \ldots, n$,

$$p_{k,n} = (-1)^{n-k}(\Delta^{n-k} b)_k.$$

et en déduire que la suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ est complètement monotone.

13. Conclure la preuve du Théorème 1.

4 Le modèle d'urne de Polya

Le modèle de Polya correspond au cas $b = 0$. Pour simplifier, nous supposerons dans la suite que $a = 1$. Ainsi, à chaque étape, on ajoute uniquement une boule de la couleur tirée. Rappelons la définition (3) de ξ_n et définissons de plus, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $c^{(0)} = 1$ et pour $k \geqslant 1$,

$$c^{(k)} = c(c+1)\ldots(c+k-1).$$

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $y_1, \ldots, y_n \in \{0,1\}$, si $k = y_1 + \ldots + y_n$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\xi_1 = y_1, \ldots, \xi_n = y_n\right) = \frac{v^{(k)} r^{(n-k)}}{(v+r)^{(n)}}.$$

2. Montrer l'existence d'une loi de probabilité μ_∞ sur $[0,1]$ vérifiant, pour tout $n \geqslant 1$, $k = 0, \ldots, n$,

$$\mathbb{P}\left(\xi_1 = 1, \ldots, \xi_k = 1, \xi_{k+1} = 0, \ldots, \xi_n = 0\right) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \mu_\infty(\mathrm{d}x).$$

3. En calculant $\mathbb{P}\left(\xi_1 = 1, \ldots, \xi_p = 1\right)$ pour tout $p \geqslant 1$, déduire de ce qui précède que μ_∞ est la loi $\mathrm{Beta}(v, r)$.
4. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right) = \int_0^1 B_{n,f}(x)\mu_\infty(\mathrm{d}x)$.
5. Montrer que $\left(\frac{Y_n}{n}\right)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers μ_∞ pour $n \to \infty$. En déduire la limite en loi de $(V_n)_{n \geqslant 0}$.
6. Conclure que V_∞ suit une loi $\mathrm{Beta}(v, r)$.

Fin du Sujet 1