Rapport sur l'Épreuve de Mathématiques Générales
⋆ Ecole Normale Supérieure Paris Saclay ⋆
Concours d'entrée en troisième année, session 2017

1 Description du Sujet

Ce sujet de Mathématiques générales porte sur une introduction aux systèmes dynamiques holomorphes, et plus spécifiquement sur un introduction à l'itération des polynômes d'une variables complexe. Il s'agit d'une introduction rapide et quelques exemples sont traités entièrement. Seules quelques propriétés élémentaires sont abordées en toute généralité.
Il a été conçu pour être progressif et pour ne nécessiter qu'un socle assez général de connaissances mathématiques.
Le sujet comporte trois parties :

— La première partie traîte des fonction holomorphes propres du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même. Le but de la partie est de montrer que toute fonction holomorphe propre $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est de la forme
$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z},$$
où $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{D}$. A cette fin, on commence par redémontrer le Lemme de Schwarz, puis on prouve que toute fonction de la forme $z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $a \in \mathbb{D}$ est un automorphisme holomorphe de $\mathbb{D}$. On montre ensuite que toute fonction holomorphe propre $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ admet un degré fini et on étudie le comportement local de f près de ses zéros. On conlut finalement à l'aide du Lemme de Schwartz.

— La dexième partie porte sur les premiers exemples : z^d et l'unique polynôme de Chebichev T_d de degré $d \geq 2$. Le but de la partie est de montrer que ce sont les seuls polynômes unitaires centrés dont l'ensemble de Julia est soit le cercle unité (pour z^d) soit un segment (pour T_d). On commence par étudier z^d et on montre que $J_{z^d} = \mathbb{S}^1$, puis on déduit de la partie précédente qu'il s'agit du seul polynôme unitaire centré ayant cette propriété.
On s'intéresse ensuite aux polynômes de Chebichev : on montre que leur ensemble de Julia est un segment et on utilise encore une fois la première partie pour conclure.

— Dans la troisième et dernière partie, on aborde les propriétés élémentaires des ensembles de Julia et des bassins d'attraction de l'infini de polynômes. On commence par montrer que K_P et J_P sont toujours compacts et non-vides. On montre ensuite qu'ils sont totalement invariants, i.e. que $P^{-1}(J_P) = J_P = P(J_P)$ et $P^{-1}(K_P) = K_P = P(K_P)$. On conclut le sujet en montrant que $\mathcal{A}_P(\infty)$ est connexe et que toute composante connexe de K_P est un sous-ensemble plein du plan complexe, c'est-à-dire que son complémentaire est connexe.

2 Commentaires du correcteur

Le sujet de Mathématiques Générales était volontairement un peu long afin de laisser une petite liberté de choix des questions à traiter aux candidats. Il portait essentiellement sur une introduction à l'itération des polynômes complexes. Les connaissances mises en jeu relèvent principalement de la topologie générale, ainsi que des bases de l'analyse complexe (principe du maximum, zéros isolés, ...).

— La première partie a été correctement traitée par la plupart des candidats, à l'exception des questions 5 et 6 qui ont été correctement traitées par la moitié des candidats environ. Les arguments à mettre en place sont très classiques.
— Concernant la deuxième partie portait, plusieurs questions nécessitaient des réponses plus élaborées (notamment les question 14, 15 et 18). Ces questions-là ont été géneralement ratées par les deux tiers des candidats.
— dans la troisième et dernière partie , la question 19 a été bien traitée seulement par environ un tiers des candidats. Les questions 20 à 22 ont été assez bien traitées en général. Les question 23 à 25 ont été traitées uniquement par une dizaine de candidats et les dernières seulement par deux étudiants. La partie est clairement plus difficile que les deux précédentes.

Le niveau affiché par les candidats lors de cette épreuve est assez hétérogène. Un tiers des candidats me semble ont affiché un assez bon niveau de connaissances, douze candidats ont rendu une copie plus intéressante que les autres, du point de vue de la prise de risque et de l'originalité des idées proposées.

A noter que seul un candidat a fait toutes les questions et que le sujet était long pour le temps imparti. Il n'était donc pas attendu que les candidats fassent l'intégralité du sujet.