Solution partielle du sujet de Probabilités, Cachan 3A 2017

Avertissement: Je tiens à préciser que je ne suis pas lié à l'École Normale Supérieure de Cachan; par suite les affirmations vraies ou fausses contenues dans ces pages ne sauraient engager l'École.

Olivier Garet, le 13 avril 2017

I

Remarque préliminaire: on utilisera fréquemment la forme suivante du théorème de Slutsky, qui est un corollaire de la forme générale rappelée en introduction: si X_n converge en loi vers γ et que X'_n converge en probabilité vers 0, alors $X_n + X'_n$ converge en loi vers γ. En effet, d'après la forme rappellée, (X_n, X'_n) converge en loi vers $\gamma \otimes \delta_0$; comme la fonction $f(x, y) = x + y$ est continue, $f(X_n, X'_n)$ converge en loi vers la mesure image de $\gamma \otimes \delta_0$ par f, soit γ.

1. (a) Soit k un entier naturel entre 1 et n. $X_{k,n}$ étant le k-ième plus petit des X_i, dire que $X_{k,n} \leq x$, c'est dire qu'il y a au moins k indices i tels que X_i est plus petit que x. Or, le nombre d'indices i tels que X_i est plus petit que x est précisément $S_n(x)$, ce qui nous donne

$$\{X_{k,n} \leq x\} = \{S_n(x) \geq k\} \tag{1}$$

Le raisonnement vu ci-dessus est encore valide si k est remplacé par une variable aléatoire $k(n)$ à valeur dans $\{1, \ldots, n\}$.

En particulier $\{X_{k(n),n} \leq x\} = \{S_n(x) \geq k(n)\}$, et en passant au complémentaire $\{X_{k(n),n} > x\} = \{S_n(x) < k(n)\}$.

(b) Comme les X_i sont iid, les variables aléatoires $1\!\!1_{\{X_i \leq x\}}$ sont des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli, de paramètre $\mathbb{P}(X_1 \leq x) = F(x)$. Elles sont évidemments intégrables: la loi forte des grands nombres s'applique et $\frac{S_n(x)}{n}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(1\!\!1_{\{X_1 \leq x\}}) = F(x)$. Comme $k(n) \to p$,

$$\frac{S_n(x)}{k(n)} = \frac{S_n(x)/n}{k(n)/n} \to \frac{F(x)}{p} \ \mathbb{P} - p.s.$$

(c) On veut montrer que $X_{\lfloor np \rfloor+1,n}$ converge presque sûrement vers θ_p. D'après le critère fondamental de convergence presque sûre, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\limsup\{|X_{\lfloor np \rfloor+1,n} - \theta_p| > \varepsilon\}) = 0$. On a

$$\begin{aligned}&\limsup\{|X_{\lfloor np \rfloor+1,n} - \theta_p| > \varepsilon\}\\ &= \limsup\{X_{\lfloor np \rfloor+1,n} > \theta_p + \varepsilon\} \cup \limsup\{X_{\lfloor np \rfloor+1,n} < \theta_p - \varepsilon\}\end{aligned}$$

On doit montrer que ces deux événements sont de probabilité nulles. On va le faire pour le premier; la preuve du second est analogue.

Posons $A_\varepsilon = \limsup\{X_{\lfloor np\rfloor+1,n} > \theta_p + \varepsilon\}$. On a

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \{X_{\lfloor np\rfloor+1,n} > \theta_p + \varepsilon \text{ i.s.}\} \\ &= \{S_n(\theta_p+\varepsilon) < \lfloor np\rfloor + 1 \text{ i.s.}\} \quad \subset \{\liminf \frac{S_n(\theta_p+\varepsilon)}{n} \le p\}, \end{aligned}$$

puisque $\lfloor np\rfloor/n \le p + 1/n$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbb{P}(A_\varepsilon) > 0$, comme $\mathbb{P}(\frac{S_n(\theta_p+\varepsilon)}{n} \to F(\theta_p+\varepsilon)) = 1$, on a

$$\mathbb{P}(\{\frac{S_n(\theta_p+\varepsilon)}{n} \to F(\theta_p+\varepsilon)\} \cap A_\varepsilon) = \mathbb{P}(A_\varepsilon) > 0.$$

Ainsi, $\{\frac{S_n(\theta_p+\varepsilon)}{n} \to F(\theta_p+\varepsilon)\} \cap A_\varepsilon$ est non-vide et on obtient $F(\theta_p+\varepsilon) \le p$. On a alors

$$F(\theta_p+\varepsilon) \le p = F(\theta_p) \le F(\theta_p+\varepsilon),$$

car F est croissante: $F(\theta_p+\varepsilon) = p$, ce qui contredit l'hypothèse unicité rappelée en introduction.

2. On pose $a = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) = 1\}$. On va montrer $\limsup X_{n,n} \le a$ presque sûrement. Si $a = +\infty$, il n'y a rien à montrer. Sinon, soit x_n est une suite de réels plus grands que a convergeant vers $a = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) = 1\} \in$. Comme F est continue à droite, $F(a) = \lim F(x_n) = 1$. Avec probabilité 1, on a pour tout n, $X_{n,n} \le a$ (car $X_i \le a$ presque sûrement pour tout i entre 1 et n). Une intersection dénombrable d'événements de probabilités 1 est de probabilité 1, donc $\limsup X_{n,n} \le a$ presque sûrement.

   On va maintenant montrer que $\liminf X_{n,n} \ge a$ presque sûrement. a est supérieur à $-\infty$ car la limite de F en $-\infty$ est 0. Soit donc x réel avec $x < a$. On a

   $$\{X_{n,n} > x\} = \{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > x\}} > 0\}.$$

   Or, avec la loi forte des grands nombres, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > x\}}$ tend presque sûrement vers $\mathbb{P}(X_1 > x) = 1 - F(x) > 0$; ceci entraîne que presque sûrement, $\{X_{n,n} > x\}$ est réalisé pour n assez grand, ce qui entraîne $\liminf X_{n,n} \ge x$ presque sûrement. Maintenant, si x_k est une suite croissante de réels qui tendent vers a, par intersection dénombrable, on a avec probabilité 1, $\liminf X_{n,n} \ge x_k$, ce qui entraîne que $\liminf X_{n,n} \ge x$, toujours avec probabilité 1.

3. (a) Soit $h > 0$. On a

   $$\begin{aligned} F(\theta_p + h) &= F(\theta_p) + \int_{]\theta_p, \theta_p+h]} f(x)\, d\lambda(x) \\ &= p + \int_{]\theta_p, \theta_p+h]} f(x)\, d\lambda(x) \end{aligned}$$

Or

$$|\int_{]\theta_p,\theta_p+h]} f(x)\,d\lambda(x) - hf(\theta_p)| \leq h \sup\{|f(x)-f(\theta_p)|; x \in [\theta_p, \theta_p+h]\},$$

d'où avec l'hypothèse de continuité de f en θ_p:

$$F(\theta_p + h) = p + hf(\theta_p) + o(h).$$

En substituant à h $x/\sqrt{n}$, on obtient

$$p_n - p = \frac{x}{\sqrt{n}} f(\theta_p) + o(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

(b) Avec (1), on a

$$\begin{aligned}\{\sqrt{n}(X_{(k,n)} - \theta_p) \leq x\} &= \{X_{(k,n)} \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + \theta_p\} = \{X_{(k,n)} \leq y_n\} \\ &= \{S_n(y_n) \geq k\} = \{\sqrt{n}(\frac{S_n(y_n)}{n} - p_n) \geq (\frac{k}{n} - p_n)\sqrt{n}\} \\ &= \{V_n \geq (\frac{k}{n} - p_n)\sqrt{n}\}\end{aligned}$$

(c) En appliquant le théorème central limite aux variables $1\!\!1_{\{X_i \leq \theta_p\}}$, on obtient

$$\frac{S_n(\theta_p) - np}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, p(1-p)).$$

On va montrer que $\frac{S_n(y_n) - S_n(\theta_p) - n(p_n - p)}{\sqrt{n}}$ tend en probabilité vers 0, ce qui permettra de conclure avec le lemme de Slutski. Pour cela, il suffit de montrer que $\frac{S_n(p_n) - S_n(\theta_p) - n(p_n - p)}{\sqrt{n}}$ tend dans L^2 vers 0. On a

$$S_n(y_n) - S_n(\theta_p) = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{\{\theta_p < X_i \leq y_n\}},$$

donc $\mathbb{E}(S_n(y_n) - S_n(\theta_p)) = n(F(y_n) - F(\theta_p)) = n(p_n - p)$. Ainsi, $\frac{S_n(y_n) - S_n(\theta_p) - n(p_n - p)}{\sqrt{n}}$ est centré; le carré de son moment d'ordre deux est sa variance, soit

$$\frac{1}{n} n(p_n - p)(1 - (p_n - p)) \leq p_n - p = O(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

On a donc bien la convergence dans L^2, donc en probabilité, de $\frac{S_n(y_n) - S_n(\theta_p) - n(p_n - p)}{\sqrt{n}}$ vers 0; comme $\frac{S_n(\theta_p) - np}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, p(1-p))$, le lemme de Slutski nous donne bien

$$\frac{S_n(y_n) - np_n}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, p(1-p)).$$

(d) Pour montrer la convergence en loi de $\sqrt{n}(X_{\lfloor np\rfloor+1,n} - \theta_p)$, il suffit de montrer la convergence de $\mathbb{P}(\sqrt{n}(X_{\lfloor np\rfloor+1,n} - \theta_p) \leq x)$ vers $G(x)$ pour tout x réel qui est un point de continuité d'une loi de fonction de répartition G.

Soit x un réel quelconque fixé. On a $\lfloor np\rfloor + 1 = np + O(1)$, donc

$$\begin{aligned}\frac{\lfloor np\rfloor+1}{n} - p_n &= p - p_n + O(1/n)\\ &= -\frac{x}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

ainsi si on pose $\varepsilon_n = \sqrt{n}(\frac{\lfloor np\rfloor+1}{n} - p_n) + xf(\theta_p)$, on a $\varepsilon_n = o(1)$. Maintenant,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\sqrt{n}(X_{\lfloor np\rfloor+1,n} - \theta_p) \leq x) &= \mathbb{P}(V_n \geq \sqrt{n}(\frac{\lfloor np\rfloor+1}{n} - p_n))\\ &= \mathbb{P}(V_n + \varepsilon_n \geq -xf(\theta_p))\\ &= \mathbb{P}(-\frac{V_n}{f(\theta_p)} - \frac{\varepsilon_n}{f(\theta_p)} \leq x)\end{aligned}$$

V_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0, p(1-p))$, donc $-\frac{V_n}{f(\theta_p)}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{p(1-p)}{f(\theta_p)^2})$. Comme $-\frac{\varepsilon_n}{f(\theta_p)}$ tend sûrement, donc en probabilité, vers 0, le lemme de Slutski nous dit que $-\frac{V_n}{f(\theta_p)} - \frac{\varepsilon_n}{f(\theta_p)}$ tend en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{p(1-p)}{f(\theta_p)^2})$. Comme x est un point de continuité de $\mathcal{N}(0, \frac{p(1-p)}{f(\theta_p)^2})$, $\mathbb{P}(-\frac{V_n}{f(\theta_p)} - \frac{\varepsilon_n}{f(\theta_p)} \leq x)$ converge vers $G(x)$, où x est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, \frac{p(1-p)}{f(\theta_p)^2})$. Par suite, il en est de même pour $\mathbb{P}((\sqrt{n}(X_{\lfloor np\rfloor+1,n} - \theta_p) \leq x)$, ce qui montre que $\sqrt{n}(X_{\lfloor np\rfloor+1,n} - \theta_p)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{p(1-p)}{f(\theta_p)^2})$.

4. On a $\{X_{i,n} = \theta_p\} \subset \cup_{k=1}^n \{X_k = \theta_p\}$, d'où $\mathbb{P}(X_{i,n} = \theta_p) \leq n\mathbb{P}(X_1 = \theta_p) = 0$; en effet F étant continue, la loi de X_1 est sans atome, puisque $\mathbb{P}(X_1 = a) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_1 \in]a-1/n, a]) = \lim_{n\to+\infty} F(a) - F(a-1/n)$.

5. On a

$$\mathbb{P}(\theta_p \in [X_{i_n,n}, X_{j_n,n}]) = 1 - \mathbb{P}(\theta_p > X_{j_n,n}) - \mathbb{P}(\theta_p < X_{i_n,n}),$$

donc pour montrer le résultat voulu, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(\theta_p > X_{j_n,n})$ et $\mathbb{P}(\theta_p < X_{i_n,n})$ convergent chacun vers $\alpha/2$. Pour n assez grand $i_n = np - \sqrt{n}a_\alpha\sqrt{p(1-p)}$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\theta_p < X_{i_n,n}) &= \mathbb{P}(S_n(\theta_p) < i_n)\\ &= \mathbb{P}(S_n(\theta_p) < np - \sqrt{n}a_\alpha\sqrt{p(1-p)})\\ &= \mathbb{P}(\frac{S_n(\theta_p) - \mathbb{E}(S_n(\theta_p))}{\text{Var } S_(\theta_p)} < -a_\alpha,\end{aligned}$$

qui converge vers $\int_{-\infty}^{-a_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$ d'après le théorème central limite, soit donc vers $\alpha/2$.

6. (a) Le calcul est classique:

$$\mathbb{P}(X_{n,n} \leq t) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n X_i \leq t) = F(t)^n,$$

par indépendance des X_i. De même

$$\mathbb{P}(X_{1,n} \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n X_i > t) = 1 - (1 - F(t))^n,$$

(b) Ici $F(t) = 1 - e^{-t}$ pour $t \geq 0$, et

$$\mathbb{P}(n^\beta X_{1,n} \leq t) = 1 - (e^{-n^{-\beta} t})^t = 1 - e^{-n^{-\beta+1} t}$$

Ainsi, en prenand $\beta = 1$, on voit que $nX_{1,n}$ est égal en loi à X_1 pour tout n. D'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n,n} - b_n \leq t) &= F(b_n + t)^n \\ &= (1 - e^{b_n + t})^n \end{aligned}$$

Si $b_n \to +\infty$, on a $\log(1 - e^{b_n+t})^n = n \log(1 - e^{b_n+t}) \sim -ne^{-b_n} e^{-t}$. En prenant $b_n = \log(n)$, on a $\log(1 - e^{b_n+t})^n \sim e^{-t}$, donc $\mathbb{P}(X_{n,n} - b_n \leq t)$ tend vers $\exp(-e^{-t})$, ce qui montre la convergence en loi, puisque la fonction obtenue à la limite est càdlàg, avec une limite 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$. La fonction est également continue, continue par morceaux, ce qui montre que la loi associée est à densité.

FIN