Sujet 1 : Probabilités et Statistique

Préambule

Ce sujet est consacré à l'étude du supremum de variables aléatoires gaussiennes. La première section étudie tout d'abord l'asymptotique de la fonction de répartition gaussienne, puis présente des calculs liés au maximum entre deux variables aléatoires gaussiennes. Les deuxième et troisième sections sont consacrées à l'asymptotique du maximum de n variables aléatoires gaussiennes. L'objectif de la quatrième section est d'établir une inégalité exponentielle pour des transformations lipschitziennes de vecteurs gaussiens. Enfin, la cinquième section traite du supremum de processus gaussiens.

Les sections ne sont pas indépendantes : certaines questions d'une section peuvent être utiles pour traiter des problèmes dans d'autres sections.

Précisons maintenant quelques notations, ainsi que divers résultats que les candidats pourront considérer comme connus. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sous réserve d'existence, l'espérance d'une variable aléatoire réelle Y est notée $\mathbb{E}(Y)$. De plus, si Z est une autre variable aléatoire, l'espérance conditionnelle de Y sachant la tribu $\sigma(Z)$ engendrée par Z est notée $\mathbb{E}(Y|Z)$, et $\mathbb{P}(A|Z)$ désigne la probabilité conditionnelle d'un événement A sachant $\sigma(Z)$. La covariance entre deux variables aléatoires est notée $\mathrm{cov}(.,.)$.

Dans la suite, $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^k$, et $\|.\|$ est la norme euclidienne induite par ce produit scalaire. Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ est un vecteur gaussien si il existe un vecteur M dans $\mathbb{R}^k$ et une matrice C de format $k \times k$ à coefficients réels, symétrique et positive, tels que la fonction caractéristique de X s'écrit, pour tout $t \in \mathbb{R}^k$:

$$\mathbb{E}\big(e^{i\langle t, X\rangle}\big) = \exp\big(i\langle t, M\rangle - \frac{1}{2}t^\top C t\big).$$

Dans cette formule comme dans la suite, $t^\top$ est la transposée du vecteur t (cette notation sera également utilisée pour les matrices). Une telle loi est notée $\mathcal{N}_k(M, C)$ ou, plus simplement, $\mathcal{N}(M, C)$ dans le cas $k = 1$; M est alors le vecteur des moyennes des composantes de X, et C en est sa matrice de covariance. Le vecteur gaussien X est dit centré si M est le vecteur nul, et réduit si C est la matrice identité. Lorsque C est une matrice inversible, X possède pour densité la fonction de $x \in \mathbb{R}^k$ suivante :

$$\frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det(C)}} \exp\big(-\frac{1}{2}(x - M)^\top C^{-1}(x - M)\big),$$

avec $\det(C)$ le déterminant de la matrice C. Rappelons maintenant trois propriétés élémentaires des vecteurs gaussiens :

Théorème 1. *Un vecteur aléatoire est gaussien si, et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne.*

Théorème 2. *Les composantes d'un vecteur gaussien sont des variables aléatoires réelles indépendantes si, et seulement si sa matrice de covariance est diagonale.*

Théorème 3. *Soient M' un vecteur de $\mathbb{R}^k$ et A une matrice de format $k \times k$ à coefficients réels. Si X est le vecteur aléatoire défini plus haut, alors la loi de $AX + M'$ est $\mathcal{N}_k(AM + M', ACA^\top)$.*

Un processus stochastique $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est appelé processus gaussien si, pour tout $I \subset \mathbb{N}$ fini, le vecteur aléatoire $(X_n)_{n \in I}$ (considéré en tant que vecteur colonne) est un vecteur gaussien.

Une classe d'événements $\mathcal{P}$ est un π-système si elle est stable par intersections finies, i.e. si $A, B \in \mathcal{P}$, $A \cap B \in \mathcal{P}$. De plus, une classe d'événements $\mathcal{L}$ est un λ-système si $\Omega \in \mathcal{L}$, $B \backslash A \in \mathcal{L}$ pourvu que $A, B \in \mathcal{L}$ avec $A \subset B$ et, si $(A_n)_n$ est une collection croissante d'éléments de $\mathcal{L}$ qui converge vers A, alors $A \in \mathcal{L}$.

Théorème 4. (**Théorème de Dynkin**) *Soient $\mathcal{P}$ un π-système et $\mathcal{L}$ un λ-système. Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, la tribu engendrée par $\mathcal{P}$ est contenue dans $\mathcal{L}$.*

Rappelons enfin qu'un processus stochastique à valeurs réelles $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale si M_n est intégrable pour tout $n \geqslant 0$, et si $\mathbb{E}(M_{n+1} | M_0, \cdots, M_n) = M_n$ p.s. pour tout $n \geqslant 0$.

Théorème 5. (**Inégalité maximale pour les martingales**) *Si $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale, pour tous $n \geqslant 0$ et $x > 0$:*

$$x\mathbb{P}\big(\sup_{0 \leqslant k \leqslant n} |M_k| > x\big) \leqslant \mathbb{E}(|M_n|).$$

1 Quelques calculs sur les variables gaussiennes

On note dorénavant Φ la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{N}(0,1)$, i.e. pour tout réel x :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

1. a. Soit $x > 0$. Vérifier que $x^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_x^{+\infty} (1 + t^{-2}) e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$, puis que

$$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b. Soit $x > 0$. Etablir que $(x^{-1} - x^{-3}) e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_x^{+\infty} (1 - 3t^{-4}) e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$, puis que

$$1 - \Phi(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\big) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

c. En déduire un équivalent de $1 - \Phi(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

2. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles gaussiennes centrées et réduites.

a. Montrer, en donnant un contre-exemple, que le vecteur aléatoire $(X, Y)^\top$ n'est pas nécessairement gaussien.

b. On suppose ici que le vecteur aléatoire $(X, Y)^\top$ est gaussien. Montrer qu'il existe un réel a, que l'on explicitera, tel que $Y - aX$ et X sont indépendantes.

c. Si X et Y sont indépendantes, calculer $\mathbb{E}(\sup(X, Y) | X)$ en fonction de Φ.

d. On suppose seulement que $(X, Y)^\top$ est un vecteur gaussien. En utilisant le résultat de la question **2.b.**, calculer $\mathbb{E}(\sup(X, Y) | X)$ en fonction de $\mathrm{cov}(X, Y)$ et Φ.

3. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note $Z = \sup(X, Y)$.

a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z \leqslant t | X) = \Phi(t)\mathbf{1}_{\{X \leqslant t\}}.$$

b. En déduire $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{Z\leqslant t\}})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

c. A l'aide de **3.b.**, déterminer $\mathbb{E}(X|Z)$ en fonction de Φ (Indication : utiliser le théorème de Dynkin -Théorème 4).

2 Supremum de variables gaussiennes

Dans cette section, $X_1, X_2, \cdots$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note $M_n = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

1. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs positives et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(z) \geqslant 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Etablir la relation :

$$\mathbb{E}\big(f(Z)\big) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\mathbb{P}(Z > t)\mathrm{d}t.$$

2. L'objectif de cette question est de d'obtenir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 1$:

$$C^{-1}\sqrt{\ln n} \leqslant \mathbb{E}(M_n) \leqslant C\sqrt{\ln n}. \tag{1}$$

a. Montrer que, lorsque $n \to +\infty$, $M_n \to +\infty$ presque sûrement.

b. En utilisant la question **1.**, montrer que, pour tous $\delta \in [1, +\infty[$ et $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{E}(M_n) \leqslant \delta + n\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2}}.$$

En déduire la borne supérieure dans l'encadrement (1).

c. Prouver qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\mathbb{E}(\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |X_i|) \geqslant K\sqrt{\ln n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

d. Montrer que $\mathbb{E}(\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |X_i|) \leqslant \mathbb{E}(|X_1|) + 2\mathbb{E}(M_n)$. En déduire la borne inférieure dans l'encadrement (1).

3. En utilisant l'encadrement de Φ établi à la section **1.**, montrer que, lorsque $n \to +\infty$:

$$(\ln n)^{-1/2} M_n \to \sqrt{2}, \text{ en probabilité.}$$

4. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire Z, et telle que $\sup_{n\geqslant 0} \mathbb{E}(Z_n^2) < +\infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(Z).$$

5. En adaptant la preuve de la question **2.b.**, prouver l'existence d'une constante $L > 0$ telle que $\mathbb{E}(M_n^2) \leqslant L \ln n$ pour tout $n \geqslant 2$. En déduire un équivalent pour $\mathbb{E}(M_n)$, lorsque $n \to \infty$.

3 Supremum des sommes partielles de variables gaussiennes

Dans cette section, $X_1, X_2, \cdots$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

De plus, S désigne le supremum des variables aléatoires $(S_n)_{n\geqslant 0}$, i.e. $S = \sup_{n\geqslant 0} S_n$.

1. En utilisant la loi forte des grands nombres, montrer que $S < +\infty$ p.s. lorsque $m < 0$, et que $S = +\infty$ p.s. lorsque $m > 0$.
2. On suppose dans cette question que $m = 0$.
  a. Montrer que $\mathbb{P}(S < +\infty) < 1$.
  b. En déduire avec la loi du 0-1 de Kolmogorov que $S = +\infty$ p.s.
3. Si $m \neq 0$, prouver l'existence d'un réel non nul a_0, que l'on explicitera, tel que le processus stochastique $(e^{a_0 S_n})_{n\geqslant 0}$ est une martingale.
4. Supposons que $m < 0$. En utilisant l'inégalité maximale pour les martingales (Théorème 5), montrer que si $x > 0$,
$$\mathbb{P}(S > x) \leqslant e^{-a_0 x}.$$
5. Déduire de la question précédente que si $m < 0$, $\mathbb{E}(e^{aS}) < +\infty$ pour tout $a < a_0$. Que dire du cas $a > a_0$?

4 Inégalité exponentielle pour les vecteurs gaussiens

Dans cette section, X et Y sont deux vecteurs gaussiens indépendants et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, supposés centrés et réduits. Pour une fonction $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note $\nabla F(x)$ le gradient de F au point $x \in \mathbb{R}^k$.

1. Soit $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante $L > 0$, i.e. pour tous $x, y \in \mathbb{R}^k$, $|h(x) - h(y)| \leqslant L\|x - y\|$. Prouver que $\mathbb{E}(e^{h(X)}) < +\infty$.
2. Pour $s, t \in \mathbb{R}^k$ fixés, on note f et g les fonctions telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^k$:
$$f(x) = e^{i\langle t,x\rangle} \text{ et } g(x) = e^{i\langle s,x\rangle}.$$
  a. Etablir la relation, pour tout $\alpha \in [0, 1]$:
$$\mathbb{E}\big(\langle \nabla f(X), \nabla g(\alpha X + \sqrt{1-\alpha^2}Y)\rangle\big) = -\langle s, t\rangle \exp\Big(-\frac{1}{2}(\|t\|^2 + 2\alpha\langle s, t\rangle + \|s\|^2)\Big).$$
  b. En déduire que
$$\operatorname{cov}\big(f(X), g(X)\big) = \int_0^1 \mathbb{E}\big(\langle \nabla f(X), \nabla g(\alpha X + \sqrt{1-\alpha^2}Y)\rangle\big)\mathrm{d}\alpha. \tag{2}$$
Dans la suite, on admet que la relation (2) est vraie pour toutes les fonctions $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ bornées et de classe $\mathcal{C}^2$.

3. Dans cette question, $t \in \mathbb{R}_+$ et $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $\mathbb{E}(h(X)) = 0$ et $\sup_{x\in\mathbb{R}^k} \|\nabla h(x)\| \leqslant 1$.
  a. Si $f = e^{th}$, prouver l'inégalité
$$\mathbb{E}\big(f(X)h(X)\big) \leqslant t\mathbb{E}\big(e^{th(X)}\big).$$
  b. En déduire que
$$\mathbb{E}\big(e^{th(X)}\big) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}.$$
4. Soit $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction bornée de classe $\mathcal{C}^2$, et telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}^k} \|\nabla h(x)\| \leqslant L$, avec $L > 0$. Montrer que pour tout $u > 0$:
$$\mathbb{P}\big(h(X) - \mathbb{E}\big(h(X)\big) > u\big) \leqslant e^{-\frac{u^2}{2L^2}}. \tag{3}$$
5. Montrer que la relation (3) est vraie lorsque h est seulement lipschitzienne de constante $L > 0$.

5 Supremum de processus gaussiens

Dans cette section, $X = (X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un processus gaussien tel que $\mathbb{E}(X_j) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Pour tout sous-ensemble J de $\mathbb{N}$, on note $\sigma_J^2 = \sup_{j\in J}\mathbb{E}(X_j^2)$ et

$$X_J^\star = \sup_{j\in J} X_j.$$

1. Pour tout $J \subset \mathbb{N}$, on note $p(J) = \mathbb{P}(X_J^\star < +\infty)$.

a. On suppose ici que J est de cardinal infini. Construire un processus gaussien X tel que $p(J) < 1$.

b. Toujours dans le cas où J est infini, exhiber un processus gaussien X pour lequel $p(J) = 1$.

2. On suppose que J est fini, $J = \{1, \cdots, k\}$, de sorte que X est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^k$ dont on notera $C = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ la matrice de covariance.

a. Montrer qu'il existe une matrice symétrique A de format $k \times k$ telle que $A^2 = C$.

b. Soit W un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^k$, supposé centré et réduit. Montrer que les variables aléatoires

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant k} X_j \text{ et } \sup_{1\leqslant j\leqslant k} (AW)_j,$$

ont même loi. Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, $(Ax)_j$ désigne la j-ème composante du vecteur Ax.

c. Soit $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $h(x) = \max_{1\leqslant j\leqslant k}(Ax)_j$ pour $x \in \mathbb{R}^k$. Montrer que h est lipschitzienne, de constante de Lipschitz σ_J.

d. En déduire que pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{P}\big(X_J^\star - \mathbb{E}(X_J^\star) > u\big) \leqslant e^{-\frac{u^2}{2\sigma_J^2}} \text{ et } \mathbb{P}\big(\mathbb{E}(X_J^\star) - X_J^\star > u\big) \leqslant e^{-\frac{u^2}{2\sigma_J^2}} \tag{4}$$

Dorénavant, on suppose que J est un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{N}$, tel que $X_J^\star < +\infty$ p.s. et $\sigma_J < +\infty$.

3. Montrer que $\sup_{I\subset J}\mathbb{E}(X_I^\star) < +\infty$, le supremum étant pris sur tous les sous-ensembles finis de J.

4. Etablir l'existence d'une constante $a > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\big(e^{a(X_J^\star)^2}\big) < +\infty.$$

5. Prouver que

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u^2}\ln \mathbb{P}\big(X_J^\star > u\big) = -\frac{1}{2\sigma_J^2}.$$

Fin du sujet 1