2C6121

Ecole Normale Supérieure de Cachan
Ecole Normale Supérieure de Rennes

SECOND CONCOURS – ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2016

Épreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Épreuve de Mathématiques Générales

Notations et préambule

L'objet du problème est de démontrer le théorème de Riesz sur la convergence en norme L^p des séries de Fourier, pour $p \in]1, \infty[$.

Dans tout le problème, on note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Toute fonction définie sur $\mathbb{T}$ peut être vue comme une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui est 2π-périodique. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est mesurable et localement intégrable, on définit

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,$$

où par périodicité l'intervalle $[-\pi, \pi[$ peut être remplacé par n'importe quel intervalle de longueur 2π.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto e^{int}$.

Les espaces fonctionnels :

- Pour $p \in [1, \infty[$, $L^p(\mathbb{T})$ est l'espace des classes de fonctions mesurables dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue. Ainsi

$$L^p(\mathbb{T}) := \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ mesurable}, \quad \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt < \infty \right\},$$

que l'on munit de la norme $\quad \forall f \in L^p(\mathbb{T}), \quad \|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$

On prendra en particulier garde à la présence du coefficient de normalisation $\frac{1}{2\pi}$.

- On définit l'espace des suites bornées (et indicées par $\mathbb{Z}$) :

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) := \left\{ u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u(n)| < \infty \right\},$$

que l'on munit de la norme $\forall u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}), \ \|u\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u(n)|$.

- On pose $\mathcal{P}(\mathbb{T}) = \text{Vect}(\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ l'ensemble des polynômes trigonométriques.

- Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F, que l'on munit de la norme habituelle $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$. Quand $E = F$, on note simplement $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E.

A propos des applications linéaires continues, on rappelle une formulation du théorème de Banach-Steinhaus :

Théorème 1 *Soit E un espace de Banach, et F un espace vectoriel normé. Soit $(L_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$. Si pour tout $x \in E$, la suite $(\|L_N(x)\|_F)_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $(\|L_N\|_{\mathcal{L}(E,F)})_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Translation, Convolution : Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\tau \in \mathbb{T}$, on note f_τ la *translatée* de f, c'est-à-dire

$$f_\tau(t) = f(t-\tau) \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{T}.$$

Pour $(f,g) \in L^1(\mathbb{T})^2$, on définit $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ le *produit de convolution* de f et g par la formule, valable presque partout **(à nouveau, on prendra garde à la présence du coefficient $\frac{1}{2\pi}$)** :

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)g_t(x)dt \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{T}.$$

On rappelle également la notion d'identitée approchée.

Définition 1 On appelle identité approchée une suite de fonctions $(k_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 2π-périodiques telle que

i) $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_N(t)dt = 1,$

ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{T}} |k_N(t)|dt \leq M,$

iii) $\forall \delta \in]0,\pi[, \quad \lim_{N\to\infty} \int_{[-\pi,\pi[\setminus[-\delta,\delta]} |k_N(t)|dt = 0.$

L'identité approchée $(k_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est dite continue si de plus

iv) $\forall N \in \mathbb{N}$, k_N est une fonction continue.

Coefficients et Série de Fourier : Etant donnée une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e_n(-t)dt,$$

et alors la suite $\widehat{f} = \left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ s'appelle la suite des *coefficients de Fourier* de f. On note également

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e_n,$$

et la suite $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ s'appelle alors la *série de Fourier* de f.

Etant donné un espace de Banach $(B, \|\cdot\|)$ tel que $B \subset L^1(\mathbb{T})$, on dit que B satisfait la convergence en norme si

$$\forall f \in B, \quad \lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_B = 0.$$

L'objet du problème est de montrer que les espaces $L^p(\mathbb{T})$ satisfont cette propriété, pour $p \in]1,\infty[$.

Partie I : Convolution et série de Fourier

I.1 **a.** Calculer la suite $\widehat{1} = \left(\widehat{1}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients de Fourier de la fonction constante égale à 1.

b. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \|f\|_1.$$

c. En déduire que l'opérateur

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \ell^\infty(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est une application linéaire continue, et calculer sa norme d'application linéaire $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}),\ell^\infty(\mathbb{Z}))}$.

I.2 Soit $P = \displaystyle\sum_{n=-d}^{d} a_n e_n$ avec $d \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\in[\![-d,d]\!]} \in \mathbb{C}^{2d+1}$ un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{T})$, et $f \in L^1(\mathbb{T})$.

a. Calculer $\widehat{P}(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et montrer que $S_N(P) = P$ pour tout $N \geq d$.

b. Calculer $f * e_n$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que

$$P * f = \sum_{n=-d}^{d} a_n \widehat{f}(n) e_n.$$

I.3 On appelle noyau de Dirichlet la suite de fonctions :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}.$$

a. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors

$$\forall N \in \mathbb{N}, \;\; S_N(f) = D_N * f.$$

b. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_N(t)dt = 1.$

c. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$D_N(t) = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},$$

et en déduire la parité de D_N.

d. Montrer que la fonction $g : t \mapsto \left(\dfrac{1}{\sin(\frac{t}{2})} - \dfrac{2}{t}\right)$ est intégrable sur $]0,\pi]$, et en déduire que la suite $\left(v_N := \displaystyle\int_0^\pi g(t) \left|\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\right| dt\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée.

e. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $n \in [\![0, N-1]\!]$. On pose

$$w_{N,n} := \int_{\frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}}^{\frac{(n+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}} \frac{\left|\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|}{t} dt - \frac{2}{\pi(n+1)}.$$

Montrer

$$\int_{\frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}}^{\frac{(n+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}} \left|\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\right| dt = \frac{2}{N+\frac{1}{2}},$$

et en déduire que

$$0 \leq w_{N,n} \leq \frac{2}{\pi n(n+1)}.$$

f. Montrer que la suite

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad u_N := \|D_N\|_1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1}$$

est bornée *(on pourra commencer par calculer $N \mapsto u_N - \frac{1}{\pi}\left[v_N + 2\sum_{n=1}^{N-1} w_{N,n}\right]$ et montrer que c'est une suite bornée).*

g. En déduire que la famille $(D_N)_{N\in\mathbb{N}}$ n'est pas une identité approchée *(dont la définition est rappelée dans le préambule).*

I.4 On appelle noyau de Féjer la suite de fonctions :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(t)$$

a. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$ et tout $N \in \mathbb{N}$, $K_N * f \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$.

b. Pour $N \in \mathbb{N}$, montrer que

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

c. Montrer que $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une identité approchée continue.

Partie II : Convergence en norme et opérateurs S_N

Dans cette partie, on considère B un espace de Banach homogène, c'est à dire satisfaisant :

- B est un sous-espace vectoriel de $L^1(\mathbb{T})$ muni d'une norme $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T})}$,
- $(B, \|\cdot\|_B)$ est un espace de Banach,
- B contient $\mathcal{P}(\mathbb{T})$,
- pour tout $f \in B$ et tout $\tau \in \mathbb{T}$, f_τ appartient à B et $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$,
- pour tout $f \in B$ et tout $\tau_0 \in \mathbb{T}$,

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0.$$

On rappelle que comme $(B, \|\cdot\|_B)$ est un espace de Banach, on peut définir l'intégrale de Riemann des fonctions continues de $\mathbb{T}$ à valeurs dans B. Les propriétés classiques (linéarité, relation de Chasles) sont valables. De plus, on a l'inégalité suivante, pour toute fonction $f : \mathbb{T} \to B$ continue :

$$\left\| \int_{\mathbb{T}} f(t)dt \right\|_B \leq \int_{\mathbb{T}} \|f(t)\|_B dt.$$

II.1 Soit $(k_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une identité approchée continue, et $f \in B$.

a. Montrer que $t \mapsto k_N(t)(f_t - f)$ est une fonction continue de $\mathbb{T}$ dans B.

b. Montrer que

$$k_N * f - f = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_N(t)(f_t - f)dt.$$

c. Montrer que

$$\|k_N * f - f\|_B \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

II.2 Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est dense dans B *(on pourra utiliser le noyau de Féjer introduit en question I.4).*

Dans les questions II.3 et II.4 on montre une caractérisation de la convergence en norme.

II.3 Supposons que B satisfait la convergence en norme.

a. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, montrer que

$$S_N : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B \\ f & \longmapsto & S_N(f) \end{array}$$

est linéaire continue.

b. Montrer que la suite réelle $(\|S_N\|_{\mathcal{L}(B)})_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \|S_N\|_{\mathcal{L}(B)} \leq M.$$

II.4 Réciproquement, supposons que la suite $(\|S_N\|_{\mathcal{L}(B)})_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée par le réel M, que l'on peut choisir tel que $M \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in B$.

a. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ tel que $\|f - P\|_B \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.

b. Conclure que $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme de B.

II.5 Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\|S_N\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \|D_N\|_1$.

II.6 Dans cette question, $B = L^1(\mathbb{T})$, qui est bien un espace de Banach homogène *(on ne demande pas de le démontrer).*

a. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\|S_N\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}))} = \|D_N\|_1$ *(on pourra utiliser comme fonction test les fonctions $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$).*

b. Montrer que l'espace $L^1(\mathbb{T})$ ne satisfait pas le convergence en norme.

Partie III : Convergence en norme et transformée de Hilbert

Dans cette partie, on considère $(B, \|\cdot\|_B)$ un espace de Banach homogène, qui satisfait en plus la propriété

$$\forall f \in B, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad e_n f \in B, \quad \text{et} \quad \|e_n f\|_B = \|f\|_B. \tag{1}$$

On définit la transformée de Hilbert sur $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ par

$$\forall P = \sum_{n=-d}^{d} a_n e_n \in \mathcal{P}(\mathbb{T}), \quad H(P) = -i \sum_{n=-d}^{d} \operatorname{signe}(n) a_n e_n,$$

où on a posé $\forall n \in \mathbb{Z}, \operatorname{signe}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$.

On définit également

$$\forall P = \sum_{n=-d}^{d} a_n e_n \in \mathcal{P}(\mathbb{T}), \quad G(P) = \sum_{n=0}^{d} a_n e_n.$$

Nous montrons dans cette partie que l'espace B (espace de Banach homogène vérifiant (1)) satisfait la convergence en norme si et seulement si l'opérateur H peut être prolongé en un endomorphisme continu de B.

III.1 Supposons que B admet la convergence en norme. Alors d'après la question II.3, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \|S_N\|_{\mathcal{L}(B)} \leq M.$$

a. On pose pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N^\flat : f \in B \mapsto e_N S_N(e_{-N} f)$. Montrer que $\|S_N^\flat\|_{\mathcal{L}(B)} \leq M$, et que

$$\forall f \in B, \quad S_N^\flat(f) = \sum_{n=0}^{2N} \widehat{f}(n) e_n.$$

b. En déduire que

$$\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}), \ \|G(P)\|_B \leq M \|P\|_B.$$

c. Exprimer $P \mapsto \left[G(P) - \frac{1}{2}\widehat{P}(0) - \frac{1}{2}P\right]$ en fonction de H, et en déduire qu'il existe une constante M' (qui dépend de M) telle que

$$\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}), \ \|H(P)\|_B \leq M' \|P\|_B.$$

d. Conclure que H peut être prolongé en un endomorphisme continu de B.

III.2 Réciproquement, on suppose que H se prolonge en un endomorphisme continu de B. Il existe alors un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}), \quad \|H(P)\|_B \leq M \|P\|_B.$$

a. Montrer qu'il existe M' (dépendant de M) tel que

$$\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}), \ \|G(P)\|_B \leq M' \|P\|_B.$$

b. Montrer que si $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$, alors

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N^\flat(P) = G(P) - e_{2N+1} G(e_{-(2N+1)} P),$$

où on rappelle que $S_N^\flat$ est défini à la question III.1.a.

c. Conclure que B satisfait la convergence en norme.

Partie IV : Convergence en norme $L^p(\mathbb{T})$ pour $p > 1$

IV.1 Montrer que l'opérateur H peut être prolongé en une isométrie de $L^2(\mathbb{T})$, et en déduire que l'espace $L^2(\mathbb{T})$ satisfait la convergence en norme.

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on pose, pour tout $z = re^{it} \in \mathbb{D} := \{w \in \mathbb{C}, |w| < 1\}$,

$$\varphi_f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int}, \qquad \widetilde{\varphi_f}(z) := -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{signe}(n) r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int},$$

$$\text{et} \quad F_f(z) = \varphi_f(z) + i\widetilde{\varphi_f}(z).$$

IV.2 Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors φ_f et $\widetilde{\varphi_f}$ sont bien définies sur $\mathbb{D}$, et que la fonction F_f est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

IV.3 On suppose $p \in]1, 2[$ et on considère $f \in L^p(\mathbb{T})$, supposée à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et telle que $f \not\equiv 0$.

a. Montrer que $\widetilde{\varphi_f}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que φ_f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ *(on pourra écrire φ_f sous la forme d'une convolution).*

Ainsi F_f est à valeurs dans l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et on peut définir $z \mapsto F_f(z)^p$ à l'aide de la détermination principale du logarithme ; cette fonction est alors holomorphe sur $\mathbb{D}$. Fixons $r \in]0, 1[$.

b. Montrer avec la formule de Cauchy que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}(F_f(re^{it})^p) dt = F_f(0)^p \in \mathbb{R}_+.$$

c. Montrer qu'il existe $\alpha < 0$ et $\beta \geq 0$ tels que

$$\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad |\sin(\theta)| \leq 1 \leq \alpha \cos(p\theta) + \beta \cos^p(\theta).$$

d. En déduire

$$\int_{\mathbb{T}} \left|\widetilde{\varphi_f}(re^{it})\right|^p dt \leq \beta \int_{\mathbb{T}} \left|\varphi_f(re^{it})\right|^p dt.$$

e. Généraliser l'inégalité précédente (éventuellement avec une constante différente de β mais toujours indépendante de f) au cas où $f \in L^p(\mathbb{T})$ n'est plus supposée à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

IV.4 Déduire de la question IV.3.e que si $p \in]1,2[$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}), \;\; \|H(P)\|_p \leq M\|P\|_p.$$

et en déduire que l'espace $L^p(\mathbb{T})$ satisfait la convergence en norme.

IV.5 On suppose désormais que $p \in]2,\infty[$ et on pose $p' = \frac{p}{p-1}$. On pose $\forall f \in L^p(\mathbb{T}), \forall g \in L^{p'}(\mathbb{T}), \;\; \langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}dt$.

a. Montrer que pour tout $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$,

$$\langle P, H(Q)\rangle = -\langle H(P), Q\rangle.$$

b. Montrer que

$$\forall f \in L^p(\mathbb{T}), \;\; \|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} |\langle f,g\rangle|$$

c. Montrer que $L^p(\mathbb{T})$ satisfait la convergence en norme.

Fin de l'épreuve