

## Sujet 2 – Analyse numérique

Le but de cette épreuve est d'étudier l'approximation de fonctions en dimension 1 et 2 par des fonctions constantes par morceaux. Il s'agit d'analyser la décroissance de l'erreur commise par différentes méthodes en fonction du nombre de paramètres utilisés pour l'approximation. Ceci fournit une base théorique pour les méthodes de compression de signaux et d'images : le nombre de paramètres est proportionnel à la taille du fichier compressé, et l'erreur représente la qualité du signal ou de l'image reconstruite.

### Notations et rappels

Dans la suite, on note  $L^2([0, 1]^d)$  l'espace de Hilbert des fonctions à valeur dans  $\mathbb{R}$  de carré intégrable sur  $[0, 1]^d$  muni du produit scalaire usuel  $\langle f, g \rangle = \int_{[0, 1]^d} f(x)g(x)dx$  et de la norme associée  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ .

Si  $V \subset L^2([0, 1]^d)$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie  $n$ , on rappelle que pour tout  $f \in L^2([0, 1]^d)$  il existe un unique élément  $P_V(f)$  de  $V$  qui satisfait

$$\|f - P_V(f)\| = \min_{g \in V} \|f - g\|. \quad (1)$$

C'est le projeté orthogonal de  $f$  sur  $V$ . On rappelle que pour toute base orthogonale  $\{\theta_k\}_{k=0}^{n-1}$  de  $V$ , on a

$$P_V(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \theta_k \rangle \theta_k.$$

On rappelle que les fonctions continues sont denses dans  $L^2([0, 1]^d)$ , c'est-à-dire que pour tout  $f \in L^2([0, 1]^d)$ , tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction continue  $g$  telle que  $\|f - g\| \leq \varepsilon$ .

On dit que  $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $\theta_k \in L^2([0, 1]^d)$  est une base hilbertienne de  $L^2([0, 1]^d)$  si c'est une famille orthonormale et si l'espace vectoriel engendré par  $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $L^2([0, 1]^d)$ . De façon équivalente, ceci signifie que pour  $f \in L^2([0, 1]^d)$ , si  $\langle f, \theta_k \rangle = 0$  pour tout  $k$  alors  $f = 0$ . On a alors, pour tout  $f \in L^2([0, 1]^d)$ , la relation de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, \theta_k \rangle^2. \quad (2)$$

### Partie 1 – Approximation constante par morceaux

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad I_{n,k} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[ & \text{si } k < n-1, \\ [1 - \frac{1}{n}, 1] & \text{si } k = n-1. \end{cases} \quad (3)$$

On note  $V_n \subset L^2([0, 1])$  l'ensemble des fonctions qui sont constantes sur chaque intervalle  $I_{n,k}$  pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

**1)** On note

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \theta_{n,k}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } x \in I_{n,k}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $\{\theta_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$  est une base orthonormale de  $V_n$ . En déduire que  $V_n$  est un espace vectoriel de dimension finie, et donner sa dimension.

2) Pour  $f \in L^2([0, 1])$  on note  $P_{V_n}(f)$  la projection orthogonale de  $f$  sur  $V_n$ , définie en (1). On note  $\varepsilon_n \stackrel{\text{def.}}{=} \|f - P_{V_n}(f)\|$ . La figure 1, gauche, montre des exemples d'approximations linéaires  $P_{V_n}(f)$ .

- Donner la valeur que prend  $P_{V_n}(f)$  sur chaque intervalle  $I_{n,k}$ .
- Si  $f$  est continue, montrer que  $P_{V_n}(f)$  converge uniformément vers  $f$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . On pourra utiliser le fait que  $f$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ .
- En utilisant la question précédente, si  $f \in L^2([0, 1])$ , montrer que  $P_{V_n}(f)$  converge pour la norme  $\|\cdot\|$  de  $L^2([0, 1])$  vers  $f$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

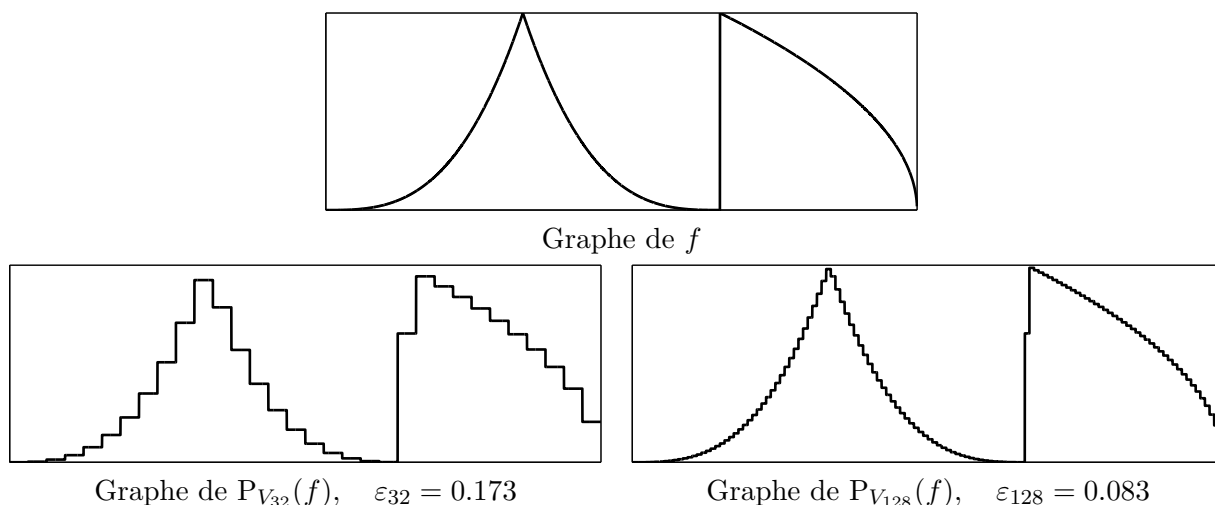


FIGURE 1 – Approximation linéaire  $P_{V_n}(f)$  pour  $n = 32$  et  $n = 128$ , pour une fonction  $f$  régulière par morceaux (montrée au dessus).

3) Pour  $\alpha > 0$ , une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $\alpha$ -hölderienne si

$$C_\alpha(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty \quad (4)$$

Une fonction 1-hölderienne est dite lipschitzienne.

- Montrer que si  $f$  est  $\alpha$ -hölderienne, alors  $f$  est  $\beta$ -hölderienne pour tout  $\beta \in ]0, \alpha]$ .
- Montrer que si  $f$  est  $\alpha$ -hölderienne, alors  $f$  est continue, et que si de plus  $\alpha \geq 1$ , alors elle est lipschitzienne.
- Si  $C_\alpha(f) < +\infty$  pour  $\alpha > 1$ , montrer que  $f$  est dérivable. Que peut-on dire de  $f'$  puis de  $f$  dans ce cas ?
- Montrer que  $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{x}$  est  $\alpha$ -hölderienne pour  $\alpha \leq 1/2$ , mais n'est pas  $\alpha$ -hölderienne pour  $\alpha > 1/2$  (on pourra penser à prendre  $y = 0$  dans (4)). Que vaut alors  $C_{1/2}(f)$  ?
- Montrer que si  $f$  est  $\alpha$ -hölderienne pour  $\alpha \in ]0, 1]$ , alors on a pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\varepsilon_n \stackrel{\text{def.}}{=} \|f - P_{V_n}(f)\| \leq \frac{C_\alpha(f)}{n^\alpha}.$$

On pourra commencer par borner  $|f(x) - P_{V_n}(f)(x)|$  sur chaque intervalle  $x \in I_{n,k}$ .

4) On dit que  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\alpha$ -hölderienne par morceaux si il existe une subdivision

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p < x_{p+1} = 1 \quad (5)$$

de  $[0, 1]$  telle que  $f$  soit  $\alpha$ -hölderienne sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}[$  pour  $i \in \{0, \dots, p\}$ . On note  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_p\}$ .

- a) Montrer que si  $f$  est  $\alpha$ -höldérienne par morceaux, alors  $f$  est bornée.  
b) On suppose que  $f$  est  $\alpha$ -höldérienne par morceaux. On note, pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{K} = \{k \in \{0, \dots, n-1\} ; I_{n,k} \cap \mathcal{X} \neq \emptyset\}.$$

Montrer qu'il existe une constante  $C$  dépendant uniquement de  $f$  telle que

$$\int_{I_{n,k}} |f - P_{V_n}(f)|^2 \leq \begin{cases} Cn^{-(2\alpha+1)} & \text{si } k \notin \mathcal{K}, \\ Cn^{-1} & \text{si } k \in \mathcal{K}. \end{cases}$$

- c) En utilisant la question précédente, montrer que si  $f$  est  $\alpha$ -höldérienne par morceaux, alors il existe une constante  $C$  qui ne dépend que de  $f$  (et donc en particulier de  $p = |\mathcal{X}|$  le cardinal de  $\mathcal{X}$ ) telle que pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\varepsilon_n \leq \frac{C}{n^{\min(1/2, \alpha)}} \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \stackrel{\text{def.}}{=} \|f - P_{V_n}(f)\|. \quad (6)$$

## Partie 2 – Ondelettes de Haar

Le but de cette partie est de détailler la construction d'une base hilbertienne de  $L^2([0, 1])$  composée d'une fonction  $\psi$  que l'on translate et que l'on dilate. Il s'agit de la base de Haar, introduite en 1909 par Alfred Haar, et qui est la première base d'ondelettes connue. La théorie des ondelettes est utilisée pour effectuer de la compression de signaux à l'aide d'une approximation non-linéaire, détaillée dans la partie suivante.

Pour  $j \in \mathbb{N}$ , on définit l'espace

$$\mathcal{V}_j \stackrel{\text{def.}}{=} V_{2^j} \subset L^2([0, 1]) \quad (7)$$

des fonctions constantes sur chaque intervalle  $I_{2^j, k}$ , définis en (3), pour  $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$

On définit les fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ -1 & \text{si } x \in [1/2, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Leurs versions dilatées par  $1/2^j$  et translatées en  $k/2^j$  des fonctions  $(\varphi, \psi)$  sont définies, pour  $j \in \mathbb{N}$ , par

$$\forall k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}, \quad \psi_{j,k}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad \text{et} \quad \varphi_{j,k}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{j/2} \varphi(2^j x - k). \quad (8)$$

- 1) Montrer qu'il existe un espace  $\mathcal{W}_j \subset L^2([0, 1])$  tel que

$$\forall j \geq 0, \quad \mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus^\perp \mathcal{W}_j,$$

où l'on note  $U = V \oplus^\perp W$  si  $U = V \oplus W$  (les sous-espaces sont en somme directe) et  $V \perp W$  (les sous-espaces sont orthogonaux). Quelle est la dimension de  $\mathcal{W}_j$  ?

- 2) Les fonctions  $(\psi_{j,k})_{j,k}$  sont appelées les ondelettes de Haar.

- a) Dessiner les graphes des fonctions  $\psi_{0,0}, \psi_{1,0}$  et  $\psi_{2,2}$ .  
b) Montrer que

$$\mathcal{B}_j^\varphi \stackrel{\text{def.}}{=} \{\varphi_{j,k} ; k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_j^\psi \stackrel{\text{def.}}{=} \{\psi_{j,k} ; k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}\}$$

sont des bases orthonormées de respectivement  $\mathcal{V}_j$  et  $\mathcal{W}_j$ .

c) Pour  $j_0 \in \mathbb{N}$ , montrer que

$$\{\varphi\} \cup \bigcup_{j < j_0} \mathcal{B}_j^\psi$$

est une base orthonormée de  $\mathcal{V}_{j_0}$ .

d) En utilisant la question 2)c) de la partie 1, montrer que

$$\{\varphi\} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_j^\psi$$

est une base hilbertienne de  $L^2([0, 1])$ .

3) Pour  $f \in L^2([0, 1])$ , et  $j \in \mathbb{N}$ , on note

$$\forall k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}, \quad a_{j,k} \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \quad \text{et} \quad d_{j,k} \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f, \psi_{j,k} \rangle,$$

ce qui définit deux vecteurs  $a_j \stackrel{\text{def.}}{=} (a_{j,k})_{k=0}^{2^j-1} \in \mathbb{R}^{2^j}$  et  $d_j \stackrel{\text{def.}}{=} (d_{j,k})_{k=0}^{2^j-1} \in \mathbb{R}^{2^j}$ . On suppose dans cette question que  $f \in V_n$  pour  $n = 2^{j_0}$  et  $j_0 \in \mathbb{N}$ .

a) Que vaut  $d_j$  pour  $j > j_0$  ?

b) Comment calculer  $a_{j_0}$  en fonction de  $(f(k/n))_{k=0}^{n-1}$  ?

c) Écrire, pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$ ,  $(a_{j,k}, d_{j,k})$  en fonction de  $(a_{j+1,2k}, a_{j+1,2k+1})$ .  
On pourra penser à écrire les fonctions  $\varphi_{j,k}$  et  $\psi_{j,k}$  comme des combinaisons linéaires des fonctions  $\varphi_{j+1,2k}$  et  $\varphi_{j+1,2k+1}$ .

d) Décrire un algorithme qui calcule l'ensemble des coefficients

$$\{d_j\}_{j=0}^{j_0-1} \cup \{a_0\}$$

à partir de  $a_{j_0}$  donné en entrée.

e) Quel est le nombre d'opérations (additions et multiplications) effectuées par cet algorithme ?

f) Montrer que la transformation

$$\mathcal{H}_{j_0} : a_{j_0} \in \mathbb{R}^{n} \longmapsto \{d_j\}_{j=0}^{j_0-1} \cup \{a_0\}$$

définit une application linéaire orthogonale. On l'appelle la transformée de Haar discrète.

g) Quel est le nombre d'opérations (additions et multiplications) nécessaire au calcul du produit  $Ha$  entre une matrice  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  arbitraire et un vecteur quelconque  $a \in \mathbb{R}^n$  ? Comparer ceci aux nombres d'opérations nécessaires au calcul de  $\mathcal{H}_{j_0}(a_0)$ .

### Partie 3 – Approximation non-linéaire

L'équation (6) montre que l'on peut approcher une fonction  $\alpha$ -höldérienne par morceaux par une fonction  $P_{V_n}(f)$  constante sur  $n$  intervalles de longueurs  $1/n$  avec une erreur  $L^2$  de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$  quelque soit  $\alpha \geq 1/2$ . On souhaite maintenant montrer que l'on peut approcher  $f$  avec une erreur qui décroît plus vite en fonction de  $n$ , si l'on choisit des intervalles de tailles variables. Une telle approximation peut se calculer à l'aide de la base de Haar introduite à la partie précédente.

1) On considère dans cette question  $f \in L^2([0, 1])$ . On note

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(j, k) ; j \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}\}.$$

et pour tout  $I \subset \mathcal{I}$ , on définit

$$f_I \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f, \varphi \rangle \varphi + \sum_{(j,k) \in I} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

où  $(\psi_{j,k})_{j,k}$  est la base de Haar définie à l'équation (8).

a) En utilisant la relation de Parseval (2), montrer que l'on a

$$\|f - f_I\|^2 = \sum_{(j,k) \notin I} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2.$$

b) Pour tout  $T > 0$ , montrer que

$$\{(j, k) \in \mathcal{I} ; |\langle f, \psi_{j,k} \rangle| > T\}$$

est un ensemble fini.

c) Montrer qu'il existe une suite  $\{(j_i, k_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$\begin{aligned} \forall i' > i \geq 0, \quad & |\langle f, \psi_{j_i, k_i} \rangle| \geq |\langle f, \psi_{j_{i'}, k_{i'}} \rangle|, \\ \forall (j, k) \in \mathcal{I}, \quad & \exists i \in \mathbb{N}, \quad (j, k) = (j_i, k_i). \end{aligned}$$

On pourra penser à définir cette suite par récurrence, en utilisant la question précédente.

d) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrer qu'il existe un ensemble  $\tilde{I} \in \mathcal{I}$  tel que  $|\tilde{I}| \leq n$  et

$$\|f - f_{\tilde{I}}\| = \min \{\|f - f_I\| ; I \subset \mathcal{I}, |I| \leq n\} \quad (9)$$

où  $|I|$  est le cardinal de  $I$ .

e) Montrer que  $f_{\tilde{I}}$  est constante sur  $m$  intervalles, et borner  $m$  en fonction de  $n$ .

f) Quand est-ce que cet ensemble  $\tilde{I}$  optimal est unique ?

Dans la suite, on dira que  $f_{\tilde{I}}$  est l'une des meilleures approximations non-linéaires de  $f$  avec  $n$  ondelettes de Haar. On notera dans ce cas  $\tilde{P}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} f_{\tilde{I}}$  (en choisissant arbitrairement  $\tilde{I}$  si celui-ci n'est pas unique). On notera  $\tilde{\varepsilon}_n = \|f - f_{\tilde{I}}\|$ .

La figure 2, montre des exemples de meilleures approximations non-linéaires  $\tilde{P}_n(f)$ .

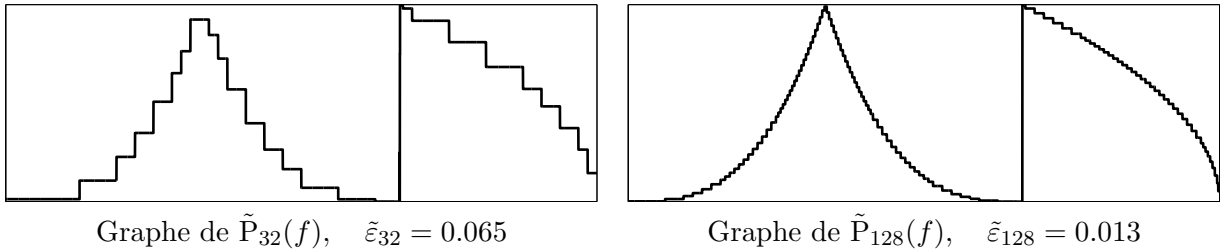


FIGURE 2 – Meilleure approximation non-linéaire  $\tilde{P}_n(f)$  dans la base de Haar, pour  $n = 32$  et  $n = 128$ , pour une fonction  $f$  régulière par morceaux (montrée figure 1, haut).

2) Dans cette question on considère  $f$  une fonction  $\alpha$ -hölderienne par morceaux, et on note  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_p\}$  les éléments de la subdivision définie en (5). On définit, pour  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{K}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\} ; [k/2^j, (k+1)/2^j] \cap \mathcal{X} \neq \emptyset\}.$$

a) Montrer que l'on a

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}, \quad |\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \leq \frac{C_1}{2^{j/2}}. \quad (10)$$

où  $C_1$  est une constante à déterminer qui ne dépend que de  $f$ . On pourra utiliser le résultat de la question 4)a) de la partie 1.

b) Montrer que si  $j \in \mathbb{N}$  et  $k \notin \mathcal{K}_j$ , alors

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \leq \frac{C_2}{2^{j(1/2+\alpha)}}. \quad (11)$$

où  $C_2$  est une constante à déterminer qui ne dépend que de  $f$ .

3) On considère  $f$  comme à la question précédente. On définit, pour  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,

$$j_r \stackrel{\text{def.}}{=} \lceil \log_2(n_0) \rceil \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad j_s \stackrel{\text{def.}}{=} \lceil (2\alpha + 1) \log_2(n_0) \rceil \in \mathbb{N},$$

où  $\log_2$  est le logarithme en base deux, et  $\lceil a \rceil$  est la partie entière par excès de  $a \in \mathbb{R}$ . On définit

$$I = \{(j, k) ; 0 \leq j \leq j_r, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}\} \cup \{(j, k) ; 0 \leq j \leq j_s, k \in \mathcal{K}_j\}.$$

- a) Montrer qu'il existe une constante  $C_3 \in \mathbb{R}$  qui ne dépend que de  $f$  telle que  $|I| \leq C_3 n_0$ .
- b) Montrer qu'il existe une constante  $C_4 \in \mathbb{R}$  qui ne dépend que de  $f$  telle que  $\|f - f_I\|^2 \leq C_4 n_0^{-2\alpha}$ .
- c) Montrer que  $\tilde{\varepsilon}_{2j} \leq \varepsilon_{2j}$ , que  $(\tilde{\varepsilon}_n)_n$  et  $(\varepsilon_{2j})_j$  sont décroissantes.
- d) Montrer que  $(\tilde{\varepsilon}_{C_3 n_0})^2 \leq C_4 n_0^{-2\alpha}$ .
- e) En déduire qu'il existe une constante  $C$  qui ne dépend que de  $f$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{\varepsilon}_n \leq \frac{C}{n^\alpha}. \quad (12)$$

Comparer ceci avec le résultat (6).

#### Partie 4 – Approximation d'images

Pour  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^2([0, 1])$ , on définit  $f \otimes g \in L^2([0, 1]^2)$  par la formule

$$\forall x = (x_1, x_2) \in [0, 1]^2, \quad (f \otimes g)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x_1)g(x_2).$$

Pour  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels de  $L^2([0, 1])$ , on définit le produit tensoriel des deux espaces par

$$A \otimes B \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Vect} \{f \otimes g ; f \in A \quad \text{et} \quad g \in B\} \subset L^2([0, 1]^2),$$

c'est-à-dire l'espace engendré par les fonctions de la forme  $f \otimes g$  pour  $(f, g) \in A \times B$ .

1) On définit  $\mathcal{V}_j^0 \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{V}_j \otimes \mathcal{V}_j \subset L^2([0, 1]^2)$  où  $\mathcal{V}_j$  est défini en (7). La figure 3 (au centre) montre une projection orthogonale  $P_{\mathcal{V}_j^0}(f)$  d'une fonction  $f$  constante par morceaux.

- a) Quelle est la dimension de  $\mathcal{V}_j^0$  ?
- b) Montrer que

$$\mathcal{V}_{j+1}^0 = \mathcal{V}_j^0 \oplus^\perp \mathcal{W}_j^1 \oplus^\perp \mathcal{W}_j^2 \oplus^\perp \mathcal{W}_j^3 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{W}_j^1 \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathcal{V}_j \otimes \mathcal{W}_j), \\ \mathcal{W}_j^2 \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathcal{W}_j \otimes \mathcal{V}_j), \\ \mathcal{W}_j^3 \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathcal{W}_j \otimes \mathcal{W}_j). \end{cases}$$

c) Montrer que pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $k = (k_1, k_2) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2$  les fonctions

$$\varphi_{j,k}^0 \stackrel{\text{def.}}{=} \varphi_{j,k_1} \otimes \varphi_{j,k_2}, \quad \psi_{j,k}^1 \stackrel{\text{def.}}{=} \varphi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}, \quad \psi_{j,k}^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \psi_{j,k_1} \otimes \varphi_{j,k_2}, \quad \psi_{j,k}^3 \stackrel{\text{def.}}{=} \psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2},$$

définissent des bases orthonormées respectivement des espaces  $\mathcal{V}_j^0, \mathcal{W}_j^1, \mathcal{W}_j^2$  et  $\mathcal{W}_j^3$ .

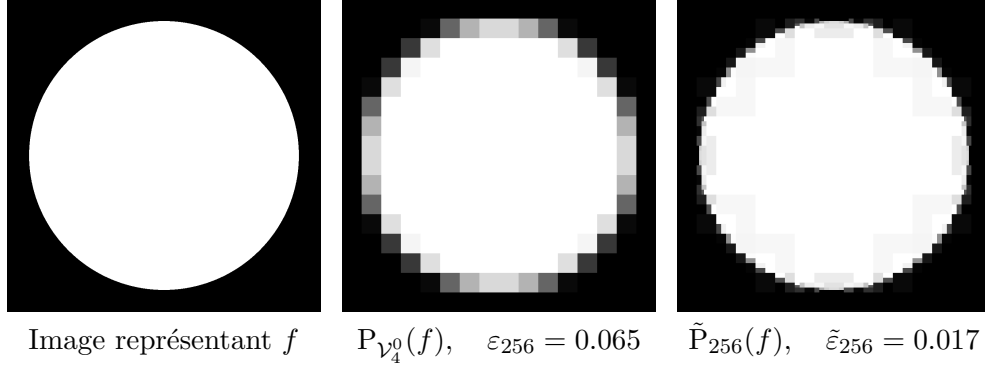


FIGURE 3 – Comparaison entre l’approximation linéaire  $P_{V_j^0}(f)$  (au centre) et la meilleure approximation non-linéaire  $\tilde{P}_n(f)$  (à droite) dans la base de Haar, pour  $(j, n = 2^{2j}) = (4, 256)$ , pour une fonction  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  en affichant en chaque point  $x \in [0, 1]^2$  un niveau de gris variant du noir (quand  $f(x) = 0$ ) au blanc (quand  $f(x) = 1$ ).

- d)** Pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2$ , quels sont les supports des fonctions  $\psi_{j,k}^\ell$  pour  $\ell \in \{1, 2, 3\}$  et de la fonction  $\varphi_{j,k}^0$  ?
- 2)** On considère dans cette question  $f \in L^2([0, 1]^2)$ . On définit

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2, \quad \forall \ell \in \{1, 2, 3\}, \quad a_{j,k} \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f, \varphi_{j,k}^0 \rangle \quad \text{et} \quad d_{j,k}^\ell \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f, \psi_{j,k}^\ell \rangle.$$

- a)** Écrire, pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2$ ,  $(a_{j,k}, d_{j,k}^1, d_{j,k}^2, d_{j,k}^3)$  en fonction des quatre coefficients  $(a_{j+1, 2k+\delta_i})_{i=1, \dots, 4}$  où l’on a noté  $\delta_1 = (0, 0)$ ,  $\delta_2 = (1, 0)$ ,  $\delta_3 = (0, 1)$ ,  $\delta_4 = (1, 1)$ .
- b)** En déduire un algorithme qui calcule les coefficients

$$\{a_{0,0}\} \cup \left\{ d_{j,k}^\ell ; 0 \leq j < j_0, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2, \ell \in \{1, 2, 3\} \right\}$$

à partir des coefficients

$$\{a_{j_0,k} ; k \in \{0, \dots, 2^{j_0} - 1\}^2\}$$

pour  $j_0 \in \mathbb{N}$ . Montrer que cet algorithme correspond au calcul d’une application linéaire orthogonale.

- c)** Quel est le nombre d’opérations (additions et multiplications) de cet algorithme ?
- 3)** On considère dans cette question  $\Omega \subset [0, 1]^2$  un ensemble dont la frontière  $\partial\Omega$  a un périmètre fini. Ceci signifie qu’il existe une courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  fermée (i.e. telle que  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ) telle que

$$L(\gamma) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ \sum_{i=1}^q \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| ; q \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_q = 1 \right\} < +\infty,$$

où  $\|u\| = u_1^2 + u_2^2$  pour  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ , et telle que  $\gamma$  paramétrise la frontière de  $\Omega$ , i.e.

$$\partial\Omega = \{\gamma(t) ; t \in [0, 1]\}.$$

Pour  $j \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k = (k_1, k_2) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$ , on définit le carré

$$S_k \stackrel{\text{def.}}{=} \left[ \frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1 + 1}{2^j} \right] \times \left[ \frac{k_2}{2^j}, \frac{k_2 + 1}{2^j} \right],$$

et également

$$\mathcal{K}_j \stackrel{\text{def.}}{=} \{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2 ; S_k \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}.$$

a) On considère

$$\tilde{\mathcal{K}}_j \stackrel{\text{def.}}{=} \{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2 ; S_k \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \quad k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont pairs}\}.$$

Montrer que l'on a  $|\tilde{\mathcal{K}}_j| \leq 1 + 2^j L(\gamma)$ . On pourra penser à introduire

$$t_k \stackrel{\text{def.}}{=} \inf \{t \in [0, 1] ; \gamma(t) \in S_k\} \in [0, 1] \cup \{+\infty\}$$

(on a utilisé la convention  $t_k = +\infty$  si l'ensemble précédent est vide) et utiliser la partition de  $[0, 1]$  définie par certains  $t_k$  pour borner  $L(\gamma)$ .

b) En déduire qu'il existe une constante  $C$  qui ne dépend que de  $\Omega$  telle que pour tout  $j$

$$|\mathcal{K}_j| \leq C2^j.$$

4) On considère la fonction indicatrice  $f$  de l'ensemble  $\Omega$  considéré à la question précédente

$$\forall x \in [0, 1]^2, \quad f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $\varepsilon_n \stackrel{\text{def.}}{=} \|f - P_{\mathcal{V}_j^0}(f)\|$  où  $n = 2^{2j}$ . Borner  $\varepsilon_n$  en fonction de  $n$  de façon similaire à (6).

La figure 3 (au centre), montre un exemple d'approximation linéaire  $P_{\mathcal{V}_j^0}(f)$ .

5) On considère la même fonction  $f$  qu'à la question précédente. Pour  $j_0 \in \mathbb{N}$ , on note

$$I \stackrel{\text{def.}}{=} \{(j, k, \ell) ; j \leq j_0, k \in \mathcal{K}_j, \ell \in \{1, 2, 3\}\}.$$

On note

$$f_I \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f, \varphi \rangle \varphi + \sum_{(j,k,\ell) \in I} \langle f, \psi_{j,k}^\ell \rangle \psi_{j,k}^\ell.$$

- a) De façon similaire à (10), borner  $|\langle f, \psi_{j,k}^\ell \rangle|$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2$  et  $\ell \in \{1, 2, 3\}$ .
- b) Que vaut  $|\langle f, \psi_{j,k}^\ell \rangle|$  pour  $\ell \in \{1, 2, 3\}$  et  $k \notin \mathcal{K}_j$  ?
- c) Borner  $|I|$  et  $\|f - f_I\|$  en fonction de  $2^{j_0}$ .
- d) Comment peut-on calculer une meilleure approximation non-linéaire  $\tilde{P}_n(f)$  d'une fonction  $f$  avec  $n$  ondelettes de Haar ?
- e) En déduire que

$$\tilde{\varepsilon}_n \stackrel{\text{def.}}{=} \|f - \tilde{P}_n(f)\| = O(n^{-1/2}). \quad (13)$$

Comparer  $\varepsilon_n$  avec  $\tilde{\varepsilon}_n$ .

La figure 3 (à droite), montre un exemple de meilleure approximation non-linéaire  $\tilde{P}_n(f)$ .

**FIN DU SUJET 2**