Probabilités et Statistiques

Corrigé du problème

Préambule

Ce sujet est consacré à l'étude du comportement asymptotique d'extrêmes d'une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La première partie présente des résultats obtenus par des techniques élémentaires sans aucune hypothèse sur la structure de dépendance des X_k. La deuxième partie traite du comportement asymptotique du maximum M_n du n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ lorsque les X_k sont indépendantes et de même loi. La troisième partie est consacrée aux records de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$ et aboutit à deux théorèmes limite pour le nombre S_n de ces records. La quatrième partie propose d'établir un théorème de caractérisation de la loi de X_1 par la suite des $\mathbf{E}\min(X_1, \dots, X_n)$.

Les 4 parties du problème sont indépendantes, mais il est conseillé d'essayer de les traiter dans l'ordre.

On précise maintenant quelques notations, rappels ou résultats que les candidats pourront considérer comme connus.

Définition 1. *Soient u_n une suite de réels strictement positifs à partir d'un certain rang et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On dit que*

a) $Y_n = O_P(u_n)$ si pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ il existe un entier n_0 et une constante C tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $P(|Y_n| \leqslant C u_n) \geqslant 1 - \varepsilon$;

b) $Y_n = o_P(u_n)$ si $u_n^{-1}|Y_n|$ converge en probabilité vers 0.

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements sur le même espace probabilisable, chaque A_n étant défini par une propriété π_n. On notera $\{\pi_n \text{ i.s.}\}$ (lire π_n se réalise infiniment souvent) l'évènement $\limsup A_n$, autrement dit l'ensemble des évènements élémentaires ω pour lesquels $I(\omega) = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ \omega \in A_n\} = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ \pi_n(\omega) \text{ vraie}\}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Soit $F : t \mapsto P(X \leqslant t)$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X. On définit son inverse généralisé F^{-1} ou fonction quantile par

$$F^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}, \quad u \mapsto F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} \ ; \ F(t) \geqslant u\}. \tag{1}$$

F^{-1} est croissante et si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$, la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ a même loi que X.

Le lemme suivant pourra être utilisé sans le redémontrer dans des questions du type loi des grands nombres.

Lemme 2 (Kronecker)**.** *Soient $(b_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs, croissante et de limite $+\infty$ et $(x_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de réels, telles que la série*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{b_k} \text{ converge dans } \mathbb{R}.$$

Alors

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On rappelle enfin le théorème limite central de Liapounov, qui peut être vu comme un corollaire du théorème limite central de Lindeberg-Lévy.

Théorème 3 (Liapounov)**.** *Notons pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, où $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes (mais pas forcément de même loi) ayant toutes un moment absolu d'ordre 3 fini et telles que*

$$\frac{1}{(\operatorname{Var} S_n)^{3/2}}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|Y_k - \mathbf{E}Y_k|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors

$$\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z,$$

où Z est une variable aléatoire de loi gaussienne standard $\mathfrak{N}(0,1)$.

1 Généralités élémentaires

On définit la variable aléatoire $M_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M_n(\omega) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i(\omega).$$

Il importe de bien comprendre la définition de M_n. Pour ω fixé, $M_n(\omega)$ est forcément l'un des *nombres* réels $X_1(\omega),\dots,X_n(\omega)$, le plus grand d'entre eux (il peut y avoir des *ex-aequo*). Pour autant, la *variable aléatoire* M_n n'est en général pas égale à l'une des variables aléatoires X_i. Il est inutile d'aller plus loin dans la lecture de ce texte tant que l'on n'a pas compris cela.

1.1 *Montrer que pour tout réel t,*

$$P(M_n > t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_i > t). \tag{2}$$

Si les X_i ont même loi, cette inégalité devient

$$P(M_n > t) \leqslant nP(X_1 > t). \tag{3}$$

La preuve repose sur la remarque élémentaire suivante : $M_n(\omega)$ dépasse t *si et seulement si* l'un au moins des réels $X_i(\omega)$ dépasse t. Autrement dit,

$$M_n(\omega) > t \quad \Longleftrightarrow \quad \exists i \in [\![1, n]\!],\ X_i(\omega) > t.$$

Notons que le ou les indices i tel(s) que $X_i(\omega) > t$ dépend(ent) de ω. Cette équivalence justifie l'égalité d'évènements [1] :

$$\{M_n > t\} = \{\omega \in \Omega\ ;\ M_n(\omega) > t\} = \{\omega \in \Omega\ ;\ \exists i \in [\![1, n]\!],\ X_i(\omega) > t\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{X_i > t\}.$$

Passant aux probabilités, on en déduit que

$$P(M_n > t) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i > t\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_i > t),$$

ce qui établit (2). Si de plus, les X_i ont même loi, les évènements $\{X_i > t\}$ ont tous même probabilité, ce qui justifie (3).

1.2 *En déduire que si les X_i ont même loi avec un moment absolu d'ordre $p > 0$ fini,* $\max_{1\leqslant i\leqslant n} |X_i| = O_P(n^{1/p})$.

Posons pour alléger les écritures

$$M_n^{\mathrm{abs}} := \max_{1\leqslant i\leqslant n} |X_i|$$

et notons au passage qu'en général $M_n^{\mathrm{abs}} \neq |M_n|$. Rappelons que l'inégalité de Markov à l'ordre p appliquée à $|X_1|$ s'écrit :

$$\forall t > 0, \quad P(|X_1| > t) \leqslant \frac{\mathbf{E}|X_1|^p}{t^p}.$$

Par report de cette majoration dans (3) appliquée aux $|X_i|$, $P(M_n^{\mathrm{abs}} > t) \leqslant nt^{-p}\mathbf{E}|X_1|^p$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $t > 0$, on peut toujours poser $t = sn^{1/p}$, ce qui donne pour tout $s > 0$, $P(M_n^{\mathrm{abs}} > sn^{1/p}) \leqslant \mathbf{E}(X_1^p)s^{-p}$, d'où $M_n^{\mathrm{abs}} = O_P(n^{1/p})$.

1.3 *Montrer qu'en fait, sous les mêmes hypothèses,* $\max_{1\leqslant i\leqslant n} |X_i| = o_P(n^{1/p})$.

On peut affiner l'inégalité de Markov ci-dessus pour voir que sous les mêmes hypothèses $t^pP(|X_1| > t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Il suffit pour cela d'écrire :

$$\mathbf{E}|X_1|^p\mathbf{1}_{\{|X_1|>t\}} \geqslant t^p\mathbf{E}\mathbf{1}_{\{|X_1|>t\}} = t^pP(|X_1| > t),$$

1. C'est l'occasion de rappeler qu'un quantificateur $\exists$ se traduit par une réunion et un quantificateur $\forall$ se traduit par une intersection.

et de remarquer que $\mathbf{E}|X_1|^p \mathbf{1}_{\{|X_1|>t\}}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ par un argument de convergence dominée puisque $\mathbf{E}|X_1|^p < +\infty$ par hypothèse. En posant à nouveau $t = sn^{1/p}$ on obtient cette fois

$$P(n^{-1/p} M_n^{\text{abs}} > s) \leqslant s^{-p} \mathbf{E}|X_1|^p \mathbf{1}_{\{|X_1|>sn^{1/p}\}}.$$

Pour tout $s > 0$ fixé, le second membre de cette inégalité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $n^{-1/p} M_n^{\text{abs}}$ tend vers 0 en probabilité, autrement dit, $M_n^{\text{abs}} = o_P(n^{1/p})$.

1.4 *On suppose dans cette question que les X_i sont des variables aléatoires positives de même loi exponentielle de paramètre $a > 0$. Leur fonction de survie G est donc définie par $G(t) = P(X_i > t) = \exp(-at)$ pour tout $t \geqslant 0$. Montrer que $M_n = O_P(\ln n)$.*

Remarquons d'abord qu'en raison de la positivité des X_i, $M_n = |M_n|$. En appliquant (3) avec $t = c \ln n$, on obtient pour tout $c > 0$,

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(|M_n| > c \ln n) \leqslant n \mathrm{e}^{-ac \ln n} = n^{1-ac}.$$

Comme ce majorant tend vers 0 dès que $c > 1/a$, on en déduit que $M_n = O_P(\ln n)$.

1.5 *Soit X une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathfrak{N}(0, 1)$. Montrer que*

$$\forall t > 0, \quad P(|X| \geqslant t) \leqslant \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right). \tag{4}$$

On remarque d'abord que $P(X \geqslant t) = \int_t^{+\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x$. En effectuant le changement de variable $x = t + y$, il vient

$$P(X \geqslant t) = \int_0^{+\infty} (2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{e}^{-ty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y \leqslant \mathrm{e}^{-t^2/2} \int_0^{+\infty} (2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

En utilisant la symétrie de la loi $\mathfrak{N}(0, 1)$, on en déduit :

$$P(|X| \geqslant t) = 2P(X \geqslant t) \leqslant 2 \times \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-t^2/2},$$

ce qui établit (4).

1.6 *Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes de même loi $\mathfrak{N}(0, 1)$. Utiliser (4) pour majorer $P(\max_{k\leqslant n} |X_k| \geqslant t)$ pour $t > 0$ et en déduire que :*

$$\forall s > \sqrt{2}, \quad P\Big(\max_{k\leqslant n} |X_k| \geqslant s(\ln n)^{1/2}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{5}$$

Il est immédiat de vérifier que dans (3) on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges. Compte-tenu de (4), on en déduit que pour tout $t > 0$, $P(M_n^{\text{abs}} \geqslant t) \leqslant n \exp(-t^2/2)$, puis, en posant $t = s(\ln n)^{1/2}$, que pour tout $s > 0$,

$$P(M_n^{\text{abs}} \geqslant s(\ln n)^{1/2}) \leqslant n \exp\left(\frac{-s^2}{2} \ln n\right) = n^{1-s^2/2}.$$

Pour $s > \sqrt{2}$, l'exposant $1 - s^2/2$ est strictement négatif et ceci établit (5). En particulier, $M_n^{\text{abs}} = O_P(\sqrt{\ln n})$.

2 Comportement asymptotique de M_n dans le cas i.i.d.

Désormais on suppose sauf mention explicite du contraire que les X_i sont indépendantes et de même loi de fonction de répartition F.

2.1 *Montrer que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(M_n \leqslant t) = F(t)^n.$$

On remarque d'abord que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M_n(\omega) \leqslant t \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i(\omega) \leqslant t,$$

d'où l'égalité d'évènements $\{M_n \leqslant t\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant t\}$. En passant aux probabilités et en utilisant l'indépendance et l'équidistribution des X_i, on en déduit

$$P(M_n \leqslant t) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leqslant t\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant t) = F(t)^n.$$

2.2 *On suppose de plus que $F(t) < 1$ pour tout t réel.*

2.2.1 Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(M_n > t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \tag{6}$$

autrement dit que M_n tend vers $+\infty$ en probabilité.

$P(M_n > t) = 1 - P(M_n \leqslant t) = 1 - F(t)^n$ et comme $0 \leqslant F(t) < 1$, $F(t)^n$ tend vers 0, ce qui établit (6).

2.2.2 Donner un exemple simple montrant que sans l'hypothèse d'indépendance des X_i, (6) *peut être fausse.*

Si toutes les X_i sont égales, $M_n = X_1$ pour tout n et il suffit de choisir pour X_1 une loi de support $\mathbb{R}$, par exemple la loi normale standard, pour que (6) ne soit vraie pour *aucun* $t \in \mathbb{R}$ (ce qui est plus que n'en demandait l'énoncé).

2.2.3 Montrer, sans utiliser l'indépendance, que si (6) *est vraie, alors M_n converge presque sûrement vers $+\infty$.*

La suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ est *croissante*, donc converge presque-sûrement (en fait sur tout Ω) vers une variable aléatoire M à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Il nous suffit donc de vérifier que $P(M = +\infty) = 1$. On remarque que par croissance de la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$, pour chaque $t > 0$ fixé, la suite d'évènements $(\{M_n > t\})_{n\geqslant 1}$ est croissante pour l'inclusion. Vérifions que sa réunion est exactement l'évènement $\{M > t\}$. Si ω appartient à $\bigcup\limits_{n\geqslant 1}\{M_n > t\}$, il existe un entier n_0, dépendant de ω, tel que $M_{n_0}(\omega) > t$. Ceci implique $M(\omega) > t$ par croissance de $(M_n(\omega))_{n\geqslant 1}$. Réciproquement, si ω appartient à $\{M > t\}$, $M(\omega) > t$ et comme $\lim_{n\to+\infty} M_n(\omega) = M(\omega)$, il existe un entier n_1 dépendant de ω tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $M_n(\omega) > t$ et donc $\omega \in \bigcup\limits_{n\geqslant 1}\{M_n > t\}$.

Par continuité séquentielle croissante de P, on en déduit que pour tout $t > 0$, $P(M_n > t)$ converge quand n tend vers l'infini vers $P(M > t)$. Par conséquent, si (6) est vraie, $P(M > t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour en déduire que $P(M = +\infty) = 1$, on peut noter que $P(M = +\infty) = P(\underset{k\in\mathbb{N}}{\cap}\{M > k\})$ et invoquer la continuité séquentielle décroissante de P ou encore noter qu'une intersection dénombrable d'évènements de probabilité 1 est encore de probabilité 1.

2.3 *On se propose maintenant de minorer $P(M_n > t)$.*

2.3.1 Montrer que pour tout $\delta > 0$ et tous $n \geqslant 1$ et $t \in \mathbb{R}$ vérifiant : $nP(X_1 > t) \leqslant \delta$,

$$P(M_n > t) \geqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta}}{\delta} nP(X_1 > t). \tag{7}$$

La fonction de survie de M_n est donnée d'après la question 2.1 par :

$$\forall t > 0, \quad P(M_n > t) = 1 - F(t)^n = 1 - \big(1 - P(X_1 > t)\big)^n.$$

On utilise alors l'inégalité élémentaire de convexité $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ (la courbe représentative de la fonction convexe $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0) avec $x = P(X_1 > t)$, ce qui nous donne :

$$\big(1 - P(X_1 > t)\big)^n \leqslant \exp\big(-nP(X_1 > t)\big),$$

d'où

$$\forall t > 0, \quad P(M_n > t) \geqslant 1 - \exp\big(-nP(X_1 > t)\big). \tag{8}$$

Considérons maintenant la fonction $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$. Elle est concave, donc pour tout $\delta > 0$, sa courbe représentative est située au dessus de la corde joignant ses points d'abscisse 0 et δ, voir figure 1. La pente de cette corde étant $(1 - \mathrm{e}^{-\delta})/\delta$, on en déduit l'inégalité :

$$\forall x \in [0, \delta], \quad 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta}}{\delta} x$$

En choisissant $x = nP(X_1 > t)$ et en reportant cette minoration dans l'expression de la fonction de survie de M_n, il vient :

$$P(M_n > t) \geqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta}}{\delta} nP(X_1 > t), \quad \text{si } nP(X_1 > t) \leqslant \delta,$$

ce qui établit la minoration (7).

2.3.2 Si de plus $\delta \leqslant 1$, on a aussi sous les mêmes hypothèses,

$$P(M_n > t) \geqslant \Big(1 - \frac{\delta}{2}\Big) nP(X_1 > t). \tag{9}$$

Pour établir (9), on remarque que le développement en série entière de $1 - \mathrm{e}^{-\delta}$ est une série alternée et que si $\delta \leqslant 1$, le terme général est décroissant en valeur

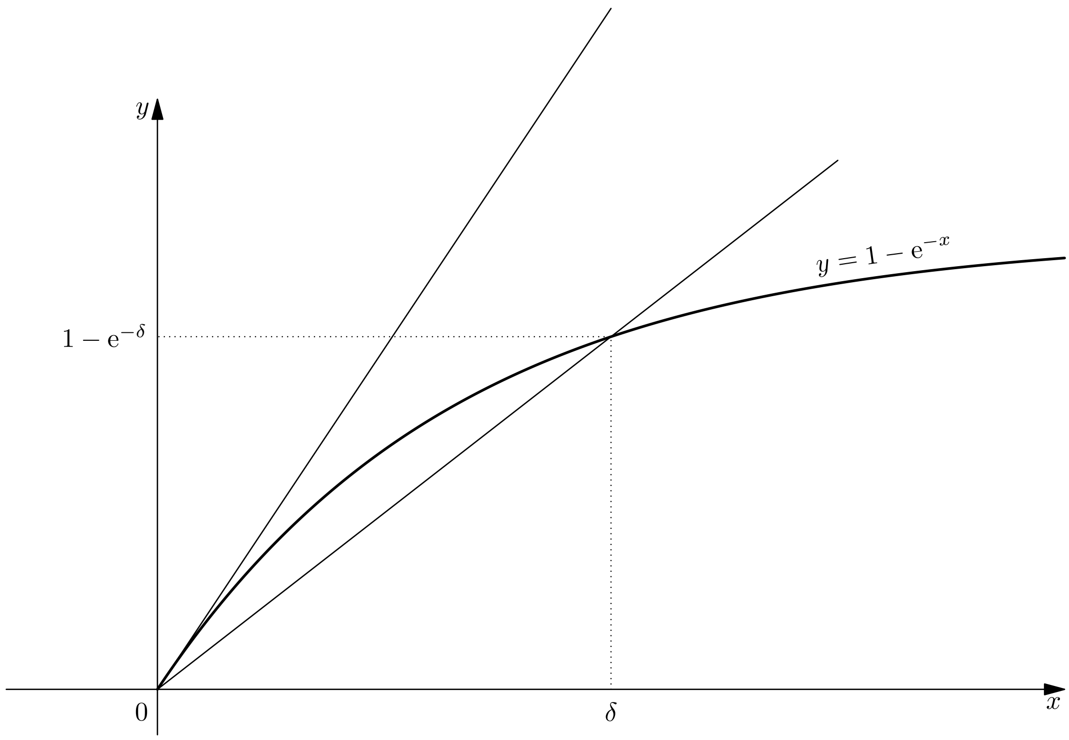

FIGURE 1 – Minoration $1 - e^{-x} \geqslant \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} x$ pour $x \in [0, \delta]$

absolue. Donc la somme de la série est toujours encadrée par deux sommes partielles consécutives, ce qui nous donne pour les deux premières d'entre elles :

$$\delta - \frac{\delta^2}{2} \leqslant 1 - e^{-\delta} \leqslant \delta.$$

En divisant par $\delta > 0$, on en déduit :

$$1 - \frac{\delta}{2} \leqslant \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta}$$

et en reportant ceci dans (7), on en déduit (9).

2.3.3 En quoi (7) *permet-elle d'affirmer que l'inégalité* (3) *est optimale ?*

Réponse rapide. L'inégalité (3) est valide pour toute suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$, tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t. Elle n'a bien sûr d'intérêt que pour les n et t tels que $nP(X_1 > t) < 1$. Dans le cas particulier où les X_i sont indépendantes, (7) montre qu'on ne peut avoir un majorant plus fin que $CnP(X_1 > t)$ dans (3) et comme $(1 - e^{-\delta})/\delta$ tend vers 1 quand δ tend vers 0, la constante C ne peut être inférieure à 1.

Réponse détaillée. Supposons qu'il existe une constante $C < 1$ telle que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $t > 0$, $P(M_n > t) \leqslant CnP(X_1 > t)$. Prenons les X_i indépendantes et de même loi et supposons de plus que $P(X_1 > t) > 0$ pour tout t. On aurait alors pour tout $\delta > 0$ et tous $n \geqslant 2$, $t > 0$ vérifiant $nP(X_1 > t) \leqslant \delta$,

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\delta}}{\delta} nP(X_1 > t) \leqslant P(M_n > t) \leqslant CnP(X_1 > t) \tag{$\star$}$$

On fixe maintenant $\delta_0 > 0$ tel que

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\delta_0}}{\delta_0} > C.$$

Ceci est possible puisque $C < 1$ et $\lim_{\delta\to 0}(1-\mathrm{e}^{-\delta})/\delta = 1$. Ensuite, puisque $P(X_1 > t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, on peut trouver pour chaque $n \geqslant 2$, un t_n tel que $P(X_1 > t_n) \leqslant \delta_0/n$. En appliquant ($\star$) avec $\delta = \delta_0$ et $t = t_n$ et en rappelant que $nP(X_1 > t_n) > 0$, on en déduit :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\delta_0}}{\delta_0} \leqslant C,$$

ce qui contredit le choix de δ_0. Donc la meilleure constante C telle que $P(M_n > t) \leqslant CnP(X_1 > t)$ pour tout $n \geqslant 2$ et tout $t > 0$ est $C = 1$.

Dans le raisonnement par l'absurde détaillé ci-dessus, il suffisait en fait de choisir une valeur particulière de n. Comme nous avons obtenu la contradiction pour tout $n \geqslant 2$, on peut aussi en déduire qu'on ne peut pas trouver de constante $C < 1$ telle que $P(M_n > t) \leqslant CnP(X_1 > t)$ pour tout $t > 0$ et tout n à partir d'un certain rang n_0.

2.4 *On suppose qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite de réels positifs $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telles que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} nP(X_1 > a_n + b_n t) = u(t), \tag{10}$$

où u est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Montrer qu'alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(M_n \leqslant a_n + b_n t) = \exp(-u(t)), \tag{11}$$

avec la convention d'écriture $\exp(-\infty) = 0$.

Traitons d'abord le cas des t pour lesquels $u(t)$ est fini. D'après (10), $P(X_1 > a_n + b_n t) = O(1/n)$ tend vers 0. On a donc quand n tend vers l'infini l'équivalent suivant :

$$n \ln\big(1 - P(X_1 > a_n + b_n t)\big) \sim -nP(X_1 > a_n + b_n t).$$

Donc $n \ln\big(1 - P(X_1 > a_n + b_n t)\big)$ tend vers $-u(t)$ quand n tend vers l'infini et par continuité de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} P(M_n \leqslant a_n + b_n t) &= P(X_1 \leqslant a_n + b_n t)^n = \big(1 - P(X_1 > a_n + b_n t)\big)^n \\ &= \exp\Big(n \ln\big(1 - P(X_1 > a_n + b_n t)\big)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-u(t)). \end{aligned}$$

Remarque. Si $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites réelles telles que $v_n \sim w_n$, cela n'implique pas en général que $\mathrm{e}^{v_n} \sim \mathrm{e}^{w_n}$. En effet l'équivalence des deux premières suites peut s'écrire $v_n = (1+\varepsilon_n)w_n$ avec ε_n tendant vers 0. Alors $\mathrm{e}^{v_n}/\mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{\varepsilon_n w_n}$ ne tend vers 1 que si $\varepsilon_n w_n$ tend vers 0. Cette condition est réalisée en particulier quand w_n est constante, ce qui est le cas ci-dessus avec $w_n = -u(t)$.

Si $u(t) = +\infty$, en appliquant l'inégalité de convexité $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$ avec $x = -P(X_1 > a_n + b_n t)$ on obtient

$$\big(1 - P(X_1 > a_n + b_n t)\big)^n \leqslant \exp\big(-nP(X_1 > a_n + b_n t)\big)$$

et comme $u(t) = +\infty$, on en déduit que $P(M_n \leqslant a_n + b_n t)$ tend vers $0 = \exp(-u(t))$.

2.5 *Si* (10) *est vérifiée et les b_n sont strictement positifs, quelles conditions supplémentaires sur la fonction u permettent d'en déduire la convergence en loi de $b_n^{-1}(M_n - a_n)$?*

Rappelons que $b_n^{-1}(M_n - a_n)$ converge en loi si et seulement si sa fonction de répartition H_n converge vers une fonction de répartition H en tout point de continuité de H. Si (10) est vérifiée, alors (11) l'est aussi et cette dernière peut se réécrire comme la convergence de $H_n(t)$ vers $\exp(-u(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On voit ainsi que $b_n^{-1}(M_n - a_n)$ converge en loi si et seulement si $H = \exp(-u) : t \mapsto \exp(-u(t))$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Rappelons maintenant qu'une fonction H de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire si et seulement si elle vérifie les 3 conditions suivantes.

i) H est croissante sur $\mathbb{R}$;

ii) H a pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$;

iii) H est continue à droite sur $\mathbb{R}$.

Puisque u est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, $H = \exp(-u)$ est automatiquement à valeurs dans $[0, 1]$, donc dans $\mathbb{R}$. Comme chaque b_n est strictement positif, (10) fait apparaître u comme limite simple sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions décroissantes. Donc u est une fonction décroissante $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ et $\exp(-u)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui satisfait la condition i). Pour que ii) soit vérifiée, nous devons supposer que u tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Ces conditions ne résultent pas de (10) puisqu'il faudrait pouvoir justifier des interversions de limite en t et en n. Enfin, pour satisfaire iii), il faut aussi supposer que u est continue à droite. Ceci ne résulte pas automatiquement de (10) puisqu'une limite simple sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions décroissantes continues à droite n'est pas toujours continue à droite (contre exemple : la fonction de survie de la loi uniforme sur $[0, 1/n]$).

En conclusion, si (10) est vérifiée et les b_n sont strictement positifs , il suffit que u soit continue à droite et ait pour limites $+\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$ pour que $b_n^{-1}(M_n - a_n)$ converge en loi.

2.6 *Utiliser ce qui précède pour étudier brièvement la convergence en loi de $b_n^{-1}(M_n - a_n)$ pour chacun des exemples suivants.*

2.6.1 X_1 suit la loi exponentielle de paramètre 1, $a_n = \ln n$, $b_n = 1$.

Si X_1 suit la loi exponentielle de paramètre 1,

$$P(X_1 > t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0, \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0, \end{cases}$$

d'où

$$nP(X_1 > \ln n + t) = \begin{cases} n & \text{si } t < -\ln n, \\ n\mathrm{e}^{-\ln n}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant -\ln n, \end{cases}$$

donc (10) est (trivialement) vérifiée avec $u(t) = \mathrm{e}^{-t}$ qui satisfait évidemment aux conditions de limites en $\pm\infty$ et de continuité à droite sur $\mathbb{R}$. Par conséquent $M_n - \ln n$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition $t \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-t})$. La loi limite est une loi de Gumbel.

2.6.2 X_1 suit la loi uniforme sur $[0,1]$, $a_n = 1$, $b_n = 1/n$.

Dans ce cas la fonction de survie de X_1 est donnée par

$$P(X_1 > t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0, \\ 1 - t & \text{si } 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Avec $a_n = 1$ et $b_n = 1/n$, on obtient

$$nP\Big(X_1 > 1 + \frac{t}{n}\Big) = \begin{cases} n & \text{si } t < -n, \\ n\Big(1 - \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)\Big) = -t & \text{si } -n \leqslant t < 0, \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

La convergence (10) est vérifiée avec

$$u(t) = \begin{cases} -t & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

On constate que u est continue à droite et que $\lim_{-\infty} u = +\infty$ et $\lim_{+\infty} u = 0$. On en déduit que $n(M_n - 1)$ converge en loi et que la loi limite a pour f.d.r. la fonction

$$H(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{t} & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Cette loi limite est la loi de $-Y$ où Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

2.6.3 X_1 suit une loi de Pareto de paramètre $p > 0$ donnée par $P(X_1 > t) = t^{-p}$ pour tout $t \geqslant 1$, $a_n = 0$, $b_n = n^{1/p}$.

La fonction de survie de X_1 est donnée par

$$P(X_1 > t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 1, \\ t^{-p} & \text{si } t \geqslant 1, \end{cases}$$

d'où

$$nP(X_1 > n^{1/p}t) = \begin{cases} n & \text{si } t < n^{-1/p}, \\ t^{-p} & \text{si } t \geqslant n^{-1/p}. \end{cases}$$

On en déduit que (10) est vérifiée avec

$$u(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t \leqslant 0, \\ t^{-p} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ (y compris en 0 puisque sa limite à droite vaut $+\infty$) et $\lim_{-\infty} u = +\infty$, $\lim_{+\infty} u = 0$. On en déduit que $n^{-1/p}M_n$ converge en loi. La loi limite a pour f.d.r.

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0, \\ \exp(-t^{-p}) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'une loi de Fréchet.

2.7 *Dans cette question, on ne suppose plus les X_k indépendantes ni de même loi. On note F_k la fonction de répartition de X_k. Soit $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de réels tendant vers $+\infty$. Montrer l'égalité d'évènements :*

$$\{M_n > c_n \ \textit{i.s.}\} = \{X_n > c_n \ \textit{i.s.}\}. \tag{12}$$

En déduire que si

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \bigl(1 - F_k(c_k)\bigr) < +\infty, \tag{13}$$

alors $P(M_n \geqslant c_n$ i.s.$) = 0$.

Notons $A := \{M_n > c_n \text{ i.s.}\}$ et $B := \{X_n > c_n \text{ i.s.}\}$. Puisque $M_n(\omega) \geqslant X_n(\omega)$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\omega \in \Omega$, l'inclusion $B \subset A$ est évidente. Montrons l'inclusion dans l'autre sens.

Définissons pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble d'indices

$$I(\omega) := \{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ M_n(\omega) > c_n\}.$$

Soit ω un élément quelconque de A. Par définition de A, $I(\omega)$ est infini. Pour chaque $n \in I(\omega)$, il y a au moins un indice $i \leqslant n$ pour lequel $X_i(\omega) = M_n(\omega) > c_n$. Posons $j(n, \omega) := \max\{i \leqslant n \ ; \ X_i(\omega) = M_n(\omega)\}$. Il résulte de cette définition et de la croissance de la suite $(c_k)_{k\geqslant 1}$ que $X_{j(n,\omega)}(\omega) > c_n \geqslant c_{j(n,\omega)}$. Notons enfin

$J(\omega) := \{j(n,\omega) \; ; \; n \in I(\omega)\}$. L'inclusion $A \subset B$ sera établie si on montre que $J(\omega)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}^*$.

Nous savons que

$$\forall n \in I(\omega), \quad X_{j(n,\omega)}(\omega) > c_n.$$

Or $I(\omega)$ est infini et la suite $(c_k)_{k\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$, donc la sous-suite $(c_n)_{n\in I(\omega)}$ tend aussi vers $+\infty$ et par conséquent $X_{j(n,\omega)}(\omega)$ tend vers $+\infty$. Comme les v.a. X_i sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (pour tout i et tout $\omega \in \Omega$, $X_i(\omega)$ est réel donc fini), les $X_{j(n,\omega)}(\omega)$ sont tous finis, cette convergence ne peut se produire que si $J(\omega)$ est infini.

La convergence de série (13) nous montre via le premier lemme de Borel-Cantelli que $P(X_n > c_n \text{ i.s.}) = 0$. L'égalité d'évènements $A = B$ que nous venons d'établir permet d'en déduire que $P(M_n > c_n \text{ i.s.}) = 0$.
N. B. Il y avait une coquille dans l'énoncé. La conclusion est bien $P(M_n > c_n \text{ i.s.}) = 0$ et pas $P(M_n \geqslant c_n \text{ i.s.}) = 0$.

2.8 *On revient au cas où les X_k sont indépendantes et de même loi de fonction de répartition F continue sur $\mathbb{R}$ et on suppose que $F(t) < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On choisit pour c_n le $(1-1/n)$-quantile de F, c'est-à-dire*

$$c_n = \inf\{t \in \mathbb{R} \; ; \; F(t) \geqslant 1 - 1/n\}. \tag{14}$$

Montrer qu'alors $P(M_n > c_n$ i.s.$) = 1$.

F étant continue sur $\mathbb{R}$, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence pour chaque $n > 1$ d'au moins un t_n tel que $F(t_n) = 1 - 1/n$. On peut donc sans changer la valeur de c_n remplacer dans sa définition l'inégalité $F(t) \geqslant 1 - 1/n$ par l'égalité $F(t) = 1 - 1/n$. Comme F a pour limite 0 en $-\infty$ et $1 - 1/n > 0$, $c_n > -\infty$. D'autre part, comme $c_n \leqslant t_n$, $c_n < +\infty$. Par continuité à droite de F, $F(c_n) = 1 - 1/n$. Les c_n pour $n \geqslant 2$ sont donc bien des réels et la suite $(c_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante (strictement). Si elle convergeait vers un réel c, on aurait par continuité de F, $F(c) = \lim_{n\to+\infty} F(c_n) = 1$. Ceci contredirait l'hypothèse que $F(t) < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc la suite croissante $(c_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers $+\infty$. D'après la question précédente, on en déduit l'égalité d'évènements (12).

Puisque $F(c_n) = 1 - 1/n$, la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} P(X_n > c_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} (1 - F(c_n)) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. Comme les évènements $\{X_n > c_n\}$ sont indépendants, le second lemme de Borel Cantelli nous dit que $P(X_n > c_n \text{ i.s.}) = 1$. En appliquant (12), on obtient finalement $P(M_n > c_n \text{ i.s.}) = 1$.

3 Records

Dans cette partie on suppose que les X_i sont indépendantes et de même loi de fonction de répartition *continue* sur $\mathbb{R}$. On se propose d'étudier le comportement asymptotique du nombre de *records* dans l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$ quand n tend vers l'infini. Les deux premières questions permettent de voir que presque sûrement il n'y a pas d'ex-aequo dans l'échantillon. On note R_n le rang de X_n parmi les X_i d'indice $i \leqslant n$. Ainsi

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k > X_n\}}. \tag{15}$$

Le nombre S_n de *records* dans l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$ est alors donné par

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{R_j = 1\}}. \tag{16}$$

La suite des *temps de records* $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par récurrence par

$$T_1 = 1 \text{ et pour } n \geqslant 1, \quad T_{n+1} = \inf\{j > T_n \; ; \; \forall i < j, X_i < X_j\}, \tag{17}$$

avec la convention $\inf \varnothing = +\infty$.

3.1 *Montrer que si les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes et si la fonction de répartition de X est continue sur $\mathbb{R}$, alors $P(X = Y) = 0$.*

Notons $\Delta = \{(x, x) \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$, $P_{(X,Y)}$ la loi du couple aléatoire (X, Y), P_X et P_Y ses lois marginales. Comme X et Y sont indépendantes, $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$ et

$$P(X = Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_\Delta \, \mathrm{d}P_{(X,Y)} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_\Delta \, \mathrm{d}(P_X \otimes P_Y).$$

Par le théorème de Tonelli,

$$P(X = Y) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_\Delta(x, y) \, \mathrm{d}P_X(x) \right\} \mathrm{d}P_Y(y).$$

On remarque ensuite que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_\Delta(x, y) \, \mathrm{d}P_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{y\}}(x) \, \mathrm{d}P_X(x) = P_X(\{y\}) = P(X = y) = 0,$$

parce que la fonction de répartition de X est continue sur $\mathbb{R}$. En reportant ceci dans l'expression de $P(X = Y)$, on obtient $P(X = Y) = 0$.

3.2 *En déduire que presque sûrement la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ne présente pas de valeurs ex-aequo.*

Notons E l'évènement « la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ présente des ex-aequo ». Autrement dit, $\omega \in E$ si et seulement s'il existe deux indices i et j distincts (pouvant dépendre de ω) tels que $X_i(\omega) = X_j(\omega)$. Ceci permet d'écrire E comme l'union dénombrable

$$E = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}^*, i\neq j} \{X_i = X_j\}.$$

D'après la question précédente, chacun des évènements $\{X_i = X_j\}$ ci-dessus est de probabilité nulle. Une union dénombrable d'évènements de probabilité nulle est encore de probabilité nulle (conséquence de la sous-σ-additivité de P), donc $P(E) = 0$. En passant au complémentaire, on voit ainsi que presque sûrement il n'y a pas d'ex-aequo dans la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

3.3 *Montrer que si la variable aléatoire réelle X a une fonction de répartition F continue sur $\mathbb{R}$, la variable aléatoire $F(X)$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$.*

Notons H la fonction de répartition de la v.a. $F(X)$. Pour montrer que cette dernière suit la loi uniforme sur $]0,1[$ (ou $[0,1]$ puisque c'est la même loi), il suffit de vérifier que pour tout $u \in]0,1[$, $H(u) = u$. En effet par continuité à droite de H en 0, on en déduit que $H(0) = 0$ et donc que $H(x) = 0$ pour tout $x < 0$. Par ailleurs, $1 \geqslant H(1) \geqslant H(1^-) = \lim_{u\to 1^-} u = 1$, d'où $H(1) = 1$ et $H(x) = 1$ pour tout $x > 1$. Ainsi l'égalité $H(u) = u$ sur $]0,1[$ entraîne que H est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $]0,1[$.

Soit u quelconque dans $]0,1[$. Notons $I(u) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, F(x) = u\}$.

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$ et de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de la non vacuité de $I(u)$. Par croissance de F, si $I(u)$ contient au moins deux élements distincts a et b ($a < b$), il contient tout le segment $[a,b]$. Donc $I(u)$ est un intervalle, éventuellement réduit à un singleton. Posons alors

$$t := \sup\{x \in \mathbb{R} \,;\, F(x) = u\}.$$

Si $I(u)$ est réduit à un singleton, $I(u) = \{t\}$ et $F(t) = u$. Sinon, par continuité à gauche de F au point t, $F(t) = \lim_{x\to t^-} F(x) = u$. Ainsi dans les deux cas possibles, $F(t) = u$.

Vérifions maintenant que

$$F(X) \leqslant u \Leftrightarrow X \leqslant t.$$

Pour l'implication $\Leftarrow$, on note que par croissance de F, $X \leqslant t$ implique $F(X) \leqslant F(t)$ et que $F(t) = u$. Pour l'implication $\Rightarrow$, on distingue les cas $F(X) = u$ et $F(X) < u$. Si $F(X) = u$, alors $X \leqslant t$ à cause de la définition ci-dessus de t comme supremum. Si $F(X) < u$, alors $X < t$ par croissance de F puisque $F(t) = u$.

L'équivalence que nous venons d'établir pour u quelconque dans $]0,1[$ nous donne $P(F(X) \leqslant u) = P(X \leqslant t) = F(t) = u$. Ainsi $H(u) = u$ pour tout $u \in]0,1[$.

3.4 *Pour tout entier $i \geqslant 1$, on note $U_i = F(X_i)$. Pour $n > 1$, soit $i_1, i_2, \dots, i_n$ une permutation des entiers de $[\![1,n]\!] = [1,n] \cap \mathbb{N}$. Montrer en utilisant F et son* *inverse généralisé F^{-1} que*

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < \cdots < X_{i_n}) = P(U_{i_1} < U_{i_2} < \cdots < U_{i_n}). \tag{18}$$

Sous réserve de justifications ultérieures, nous pouvons écrire les inégalités et égalités suivantes qui établissent (18) « par sandwich ».

$$\begin{aligned}
P(X_{i_1} < X_{i_2} < \cdots < X_{i_n}) &\leqslant P\big(F(X_{i_1}) \leqslant F(X_{i_2}) \leqslant \cdots \leqslant F(X_{i_n})\big) && \text{(a)}\\
&= P(U_{i_1} \leqslant U_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant U_{i_n}) && \text{(b)}\\
&= P(U_{i_1} < U_{i_2} < \cdots < U_{i_n}) && \text{(c)}\\
&\leqslant P\big(F^{-1}(U_{i_1}) \leqslant F^{-1}(U_{i_2}) \leqslant \cdots \leqslant F^{-1}(U_{i_n})\big) && \text{(d)}\\
&= P(X_{i_1} \leqslant X_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant X_{i_n}) && \text{(e)}\\
&= P(X_{i_1} < X_{i_2} < \cdots < X_{i_n}). && \text{(f)}
\end{aligned}$$

Justifications.

(a) Par croissance de F et inclusion d'évènements.

(b) Pour tout i, $U_i = F(X_i)$.

(c) Car p.s. il n'y a pas d'ex-aequo dans la suite $(U_k)_{k\geqslant 1}$, cf. question 3.2.

(d) Par croissance de F^{-1} et inclusion d'évènements.

(e) Car pour tout i, $F^{-1}(U_i)$ a même loi que X_i et par indépendance des composantes, les vecteurs $\big(F^{-1}(U_{i_1}), F^{-1}(U_{i_2}), \dots, F^{-1}(U_{i_n})\big)$ et $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$ ont même loi $P_{X_1}^{\otimes n}$.

(f) Car p.s. il n'y a pas d'ex-aequo dans la suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$, cf. question 3.2.

3.5 *En déduire que*

3.5.1 le vecteur aléatoire discret $(R_1, \dots, R_n)$ suit la loi uniforme sur $D_n = \{1\} \times [\![1,2]\!] \times [\![1,3]\!] \times \cdots \times [\![1,n]\!]$;

On remarque d'abord que le vecteur aléatoire discret $V_n = (R_1, \dots, R_n)$ est à valeurs dans D_n. Pour tout n-uple $(k_1, \dots, k_n)$ dans D_n, l'égalité $V_n(\omega) = (k_1, \dots, k_n)$ fixe le rangement des $X_i(\omega)$. Par exemple avec $n = 3$, l'égalité $V_3(\omega) = (1, 1, 2)$ se décode en plaçant d'abord $X_1(\omega)$, puis $X_2(\omega)$ à droite de $X_1(\omega)$, puis en intercalant $X_3(\omega)$ entre $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$. Autrement dit, $V_3(\omega) = (1, 1, 2)$ équivaut à $X_1(\omega) < X_3(\omega) < X_2(\omega)$. On vérifierait de même sans autre difficulté que d'écriture qu'il y a une correspondance bijective $(k_1, \dots, k_n) \mapsto (i_1, \dots, i_n)$ entre D_n et les permutations de $[\![1,n]\!]$ telle que

$$\{(R_1, \dots, R_n) = (k_1, \dots, k_n)\} = \{X_{i_1} < X_{i_2} < \cdots < X_{i_n}\}.$$

On utilise cette égalité et (18) pour trouver la loi de V_n. En effet en notant λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et en rappelant que $(U_1, \dots, U_n)$ suit la loi uniforme sur l'hypercube $[0,1]^n$, nous obtenons

$$\begin{aligned} P\big((R_1,\ldots,R_n)=(k_1,\ldots,k_n)\big) &= P((X_{i_1}<X_{i_2}<\cdots<X_{i_n}) \\ &= P(U_{i_1}<U_{i_2}<\cdots<U_{i_n}) \\ &= \frac{\lambda_n(\{(u_1,\ldots,u_n)\in[0,1]^n\ ;\ u_{i_1}<\cdots<u_{i_n}\})}{\lambda_n([0,1]^n)} \\ &= \frac{1}{n!} = \frac{1}{\operatorname{card} D_n}, \end{aligned}$$

en utilisant l'invariance de la mesure de Lebesgue par permutation des composantes et le fait que λ_n ne charge pas les hyperplans : ceci permet de voir qu'à un nombre fini d'ensembles de mesure nulle près, on peut partager $[0,1]^n$ en $n!$ simplexes de même mesure, définis chacun par une suite d'inéquations de la forme $u_{i_1}<\cdots<u_{i_n}$.

Nous avons ainsi montré que V_n suit la loi uniforme discrète sur D_n.

3.5.2 pour tout $n\geqslant 1$, R_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$;

Cherchons les lois marginales de V_n. On exprime pour cela $P(R_i=j)$ pour tout $j\in[\![1,i]\!]$ à l'aide de la loi de V_n pour un $n\geqslant i$ (il est clair *a priori* que le résultat ne va pas dépendre de n).

$$\begin{aligned} P(R_i=j) &= P\big(V_n\in\{1\}\times[\![1,2]\!]\times\cdots\times[\![1,i-1]\!]\times\{j\}\times[\![1,i+1]\!]\times\cdots\times[\![1,n]\!]\big) \\ &= \frac{1\times 2\times\cdots\times(i-1)\times 1\times(i+1)\times\cdots\times n}{n!} = \frac{\frac{n!}{i}}{n!} = \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $j\in[\![1,i]\!]$, $P(R_i=j)=1/i=1/\operatorname{card}([\![1,i]\!])$, ce qui montre que R_i suit la loi uniforme sur $[\![1,i]\!]$.

3.5.3 les R_i sont indépendantes ;

On déduit de ce qui précède que pour tout $n\geqslant 1$, le vecteur aléatoire discret V_n est à composantes indépendantes. En effet, pour tout $(k_1,\ldots,k_n)\in D_n$,

$$P\big(V_n=(k_1,\ldots,k_n)\big)=\frac{1}{n!}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\prod_{i=1}^{n}P(R_i=k_i).$$

Ceci étant vrai pour tout $n\geqslant 1$, on peut dire plus précisément que c'est *toute la suite infinie* $(R_i)_{i\geqslant 1}$ qui est à termes indépendants.

3.5.4 ni la loi de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ ni celle de $(T_n)_{n\geqslant 1}$ ne dépendent de la loi de X_1, tant que cette dernière est à fonction de répartition continue.

Comme nous l'avons vu ci-dessus, si X_1 a une f.d.r. continue, le calcul de la loi de la suite $(R_i)_{i\geqslant 1}$ peut se faire à partir de la suite des variables aléatoires indépendantes $U_i=F(X_i)$. Même si cette suite est construite à partir des X_i, sa loi ne dépend pas de celle des X_i, elle est entièrement caractérisée par ses lois marginales (uniformes sur $[0,1]$) et l'indépendance des composantes. Comme la loi de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ ne dépend que de celle de la suite $(R_i)_{i\geqslant 1}$, elle ne dépend pas de celle de X_1. Une argumentation similaire montre que la loi de $(T_n)_{n\geqslant 1}$ ne dépend pas de celle de X_1. En effet on peut remplacer les X_i par les U_i dans la définition de T_n sauf peut-être sur un évènement de probabilité nulle, ce qui n'affectera pas la loi de la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ qui ne dépend donc que de celle de $(U_n)_{n\geqslant 1}$.

3.6 *Déduire de la question précédente que pour tout* entier $k \geqslant 2$,

$$P(T_2 = k) = \frac{1}{(k-1)k}. \tag{19}$$

Vérifier alors que $P(T_2 = +\infty) = 0$ *et* $\mathbf{E}T_2 = +\infty$.

En écrivant l'évènement $\{T_2 = k\}$ en fonction des v.a. R_i, $i \leqslant k$ et en exploitant l'indépendance des R_i, on obtient (19) :

$$\begin{aligned} P(T_2 = k) &= P(R_1 = 1, R_2 > 1, \dots, R_{k-1} > 1, R_k = 1) \\ &= P(R_1 = 1)P(R_2 > 1) \dots P(R_{k-1} > 1)P(R_k = 1) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{k-2}{k-1} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{(k-1)k}. \end{aligned}$$

Vérifions que (19) définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, autrement dit que $P(T_2 < +\infty) = 1$.

$$P(T_2 < +\infty) = \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \frac{1}{(k-1)k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Par conséquent $P(T_2 = +\infty) = 0$, autrement dit, il y aura presque sûrement un deuxième record (le premier étant trivialement X_1) au bout d'un temps fini. Notons au passage que ceci ne serait pas vrai pour une loi discrète, par exemple avec X_1 de loi de Bernoulli de paramètre 1/2, il y a une chance sur deux que X_1 prenne la valeur 1 et dans ce cas aucun deuxième record n'est possible.

Puisque $P(T_2 = +\infty) = 0$, la variable aléatoire discrète positive T_2 à valeurs dans $[\![2, +\infty]\!]$ a pour espérance

$$\mathbf{E}T_2 = \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} kP(T_2 = k) = \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \frac{1}{(k-1)} = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Ceci indique que même s'il y aura presque sûrement un deuxième record, il risque de se faire attendre longtemps et donc que les records sont rares.

3.7 *Grâce à la question 3.5.2, on voit que*

$$\mathbf{E}S_n = \ln n + \gamma + \varepsilon(n), \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0, \tag{20}$$

où γ *désigne la constante d'Euler. Établir un résultat analogue pour* $\operatorname{Var} S_n$.

Rappelons que $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{R_k=1\}}$. Comme les $\mathbf{1}_{\{R_j=1\}}$ héritent de l'indépendance des R_k,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} S_n &= \sum_{k=2}^n \operatorname{Var}\left(\mathbf{1}_{\{R_k=1\}}\right) = \sum_{k=2}^n P(R_k = 1)P(R_k > 1) \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \times \frac{k-1}{k} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\
&= \ln n + \gamma - 1 + \varepsilon(n) - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) + \varepsilon'(n), \quad \varepsilon'(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

en rappelant que la somme de la série convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2}$ vaut $\pi^2/6$. On obtient ainsi

$$\operatorname{Var} S_n = \ln n + c + \delta(n), \quad \lim_{n\to+\infty} \delta(n) = 0,$$

la constante c valant $\gamma - \pi^2/6$.

3.8 *Montrer que*

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\{R_k=1\}} - P(R_k = 1)}{\ln k} \quad \textit{converge p.s.} \tag{21}$$

En déduire que

$$\frac{S_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 1. \tag{22}$$

La série dans (21) est une série de variables aléatoires indépendantes centrées et de carré intégrable. Un théorème classique de Kolmogorov [2] permet dans ce cas de déduire sa convergence presque-sûre de la convergence de la série des variances de terme général :

$$\operatorname{Var}\left(\frac{\mathbf{1}_{\{R_k=1\}}}{\ln k}\right) = \frac{1}{(\ln k)^2} P(R_k = 1)P(R_k < 1) = \frac{1}{(\ln k)^2} \times \frac{1}{k} \times \frac{k-1}{k} \sim \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

Cette série est donc convergente et par le théorème de Kolmogorov on en déduit la convergence p.s. (21). En appliquant le lemme de Kronecker rappelé en préambule de l'énoncé à cette série p.s. convergente, on en déduit que

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{k=2}^n \left(\mathbf{1}_{\{R_k=1\}} - P(R_k = 1)\right) = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=2}^n \left(\mathbf{1}_{\{R_k=1\}} - \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Cette dernière convergence peut se réécrire

$$\frac{S_n}{\ln n} - \frac{1}{\ln n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

2. th. de Kolmogorov, corollaire de l'inégalité maximale de Kolmogorov, cf. par exemple Billingsley th. 22.3

Et comme $(\ln n)^{-1}\sum_{k=2}^n k^{-1}$ tend vers 1, on en déduit (22).

3.9 *Montrer que*

$$\frac{S_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathfrak{N}(0,1), \tag{23}$$

où $\mathfrak{N}(0,1)$ *désigne la loi gaussienne standard.*

La convergence (23) ressemble à un théorème limite central pour S_n, à ceci près que le terme de centrage n'est pas exactement $\mathbf{E}S_n$ et la normalisation n'est pas exactement $\operatorname{Var}^{1/2} S_n$.

Commençons par regarder si S_n vérifie un TLC avec le centrage et la normalisation classiques. La difficulté ici est que les termes de la somme S_n, à savoir les $Y_k = \mathbf{1}_{\{R_k=1\}}$ ne sont pas de même loi. Nous utiliserons donc le théorème de Liapounov rappelé en préambule. Ceci nous amène à vérifier la condition de Liapounov :

$$\frac{1}{(\operatorname{Var} S_n)^{3/2}} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|Y_k - \mathbf{E}Y_k|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On remarque d'abord que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{E}|Y_k - \mathbf{E}Y_k|^3 = \mathbf{E}\left|\mathbf{1}_{\{R_k=1\}} - \frac{1}{k}\right|^3 = \left(\frac{1}{k}\right)^3\left(1-\frac{1}{k}\right) + \left(1-\frac{1}{k}\right)^3\frac{1}{k} \leqslant \frac{2}{k}$$

On en déduit que $\sum_{k=1}^n |Y_k - \mathbf{E}Y_k|^3 = O(\ln n)$. Comme d'autre part d'après la question (3.7), $\operatorname{Var} S_n \sim \ln n$, la condition de Liapounov ci-dessus est bien vérifiée (avec une vitesse de convergence en $O((\ln n)^{-1/2})$. Nous obtenons ainsi la convergence

$$Z_n := \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z,$$

où Z est une variable aléatoire de loi gaussienne standard $\mathfrak{N}(0,1)$.

Pour en déduire (23), on écrit

$$\frac{S_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}} = \frac{S_n - \mathbf{E}S_n + (\mathbf{E}S_n - \ln n)}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \times \sqrt{\frac{\operatorname{Var} S_n}{\ln n}} = a_n Z_n + b_n,$$

avec

$$a_n = \sqrt{\frac{\operatorname{Var} S_n}{\ln n}}, \quad b_n = \frac{\mathbf{E}S_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}}.$$

D'après (20) et le résultat de la question 3.7, les suites déterministes $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ convergent respectivement vers 1 et 0. Par une application du lemme de Slutsky (en version dégénérée), on en déduit que $a_n Z_n + b_n$ a même limite en loi que Z_n, ce qui achève la vérification de (23).

4 Une caractérisation extrémale de la loi des X_i

Le but de cette partie est de prouver le théorème suivant.

Théorème 4. *Soient* $(X_k)_{k\geqslant 1}$ *et* $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ *deux suites de variables aléatoires positives, indépendantes et de même loi. On suppose que* $\mathbf{E}X_1 < +\infty$ *et que*

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathbf{E}\min(X_1, \dots, X_n) = \mathbf{E}\min(Y_1, \dots, Y_n). \tag{24}$$

Alors X_1 *et* Y_1 *ont même loi.*

4.1 *Soit* Z *une variable aléatoire positive. Vérifier que*

$$\mathbf{E}Z = \int_0^{+\infty} P(Z > t)\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} P(Z > t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann généralisée, finie ou égale à $+\infty$, d'une fonction décroissante *positive*. On la convertit en intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue λ et on l'exprime comme une intégrale double :

$$\int_0^{+\infty} P(Z > t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+} P_Z\big(]t, +\infty[\big)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]t,+\infty[}(x)\,\mathrm{d}P_Z(x) \right\} \mathrm{d}\lambda(t).$$

En remarquant que pour tous réels x, t, $\mathbf{1}_{]t,+\infty[}(x) = \mathbf{1}_{]-\infty,x[}(t)$ et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} P(Z > t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]t,+\infty[}(x)\,\mathrm{d}\lambda(t)\,\mathrm{d}P_Z(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{]-\infty,x[}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \right\} \mathrm{d}P_Z(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda\big([0, x[\big)\,\mathrm{d}P_Z(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}P_Z(x) = \mathbf{E}Z.
\end{aligned}$$

4.2 *Soit* $G : t \mapsto P(X_1 > t)$ *la fonction de survie de* X_1. *Calculer en fonction de* G *la fonction de survie de* $\min(X_1, \dots, X_n)$.

Notons G_n la fonction de survie de $\min(X_1, \dots, X_n)$. En utilisant l'indépendance des X_i et leur équidistribution, on obtient pour tout t réel :

$$\begin{aligned}
G_n(t) = P(\min(X_1, \dots, X_n) > t) &= P(\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i > t) \\
&= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > t\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t) = G(t)^n.
\end{aligned}$$

Ainsi $G_n = G^n$.

4.3 *On note G^{-1} l'inverse généralisé de G défini par $G^{-1}(1) = 0$ et*

$$\forall u \in]0,1[, \quad G^{-1}(u) = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ G(t) > u\}. \tag{26}$$

Prouver la formule

$$\forall n \geqslant 1, \quad \int_0^{+\infty} G(t)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 n u^{n-1} G^{-1}(u) \,\mathrm{d}u. \tag{27}$$

En particulier, on déduit du cas $n = 1$ et de l'intégrabilité de X_1 que G^{-1} est une fonction positive intégrable sur $[0, 1]$ relativement à la mesure de Lebesgue.

Là encore, on utilise une représentation de $G(t)^n$ sous forme intégrale et le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} G(t)^n \,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 n u^{n-1} \mathbf{1}_{]0,G(t)[}(u) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 n u^{n-1} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ G(t) > u\}} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 n u^{n-1} \lambda(\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ G(t) > u\}) \,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Notons pour tout $u \in]0, 1[$,

$$K(u) = \{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ G(t) > u\}$$

et calculons $\lambda(K(u))$. Nous distinguerons deux cas.

1. $K(u) = \varnothing$, ce qui peut se produire si $P(X_1 = 0) = p \in]0, 1[$ et $u \in [1 - p, 1[$. On voit alors qu'il nous faut préciser la définition de G^{-1} en adoptant la convention que le supremum du sous-ensemble vide dans $\mathbb{R}_+$ est 0 (dans $\mathbb{R}$ on prend usuellement $-\infty$). Ceci est cohérent avec le choix $G^{-1}(1) = 0$ indiqué par l'énoncé. Donc si $K(u) = \varnothing$, $G^{-1}(u) = 0 = \lambda(K(u))$.
2. $K(u) \neq \varnothing$. Dans ce cas par décroissance de G, pour tout $t \in K(u)$, $[0, t]$ est inclus dans $K(u)$. Il en résulte que $K(u)$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$, de borne inférieure 0 et de borne supérieure $G^{-1}(u)$, finie car $u > 0$ et G tend vers 0 en $+\infty$. Dans ce cas, que $K(u)$ contienne ou non sa borne supérieure, $\lambda(K(u)) = G^{-1}(u) - 0 = G^{-1}(u)$.

Dans les deux cas, $\lambda(K(u)) = G^{-1}(u)$ et en reportant ceci dans le calcul d'intégrale ci-dessus, on établit (27).
Remarque. On peut éviter le recours à la convention $\sup \varnothing = 0$ dans le cas 1 en modifiant en amont la définition, de toutes façons incomplète, de G^{-1} en prenant dans (26) le supremum pour $t \in \mathbb{R}$ au lieu de $t \in \mathbb{R}_+$. Ainsi lorsque $G(0) = 1 - p < 1$ et $u \in]1 - p, 1[$, $G^{-1}(u) = \sup] - \infty, 0[= 0$.

Le cas $n = 1$ dans (27) nous donne

$$\mathbf{E}X_1 = \int_0^1 G^{-1}(u)\,\mathrm{d}u.$$

Donc si $\mathbf{E}X_1$ est finie ($X_1 \geqslant 0$), G^{-1} est la densité par rapport à λ d'une mesure bornée de masse totale $\mathbf{E}X_1$ et de support inclus dans $[0,1]$.

4.4 *Expliquer brièvement pourquoi si deux mesures positives bornées μ et ν sur la tribu borélienne de $[0,1]$ vérifient $\int_{[0,1]} h\,\mathrm{d}\mu = \int_{[0,1]} h\,\mathrm{d}\nu$ pour toute fonction h à valeurs réelles définie et continue sur $[0,1]$, alors $\mu = \nu$.*

Il suffit de vérifier que pour tout intervalle $[a,b] \subset [0,1]$, $\mu([a,b]) = \nu([a,b])$. Traitons d'abord le cas où $0 < a < b < 1$. Pour cela on utilise les égalités $\int_{[0,1]} h_n\,\mathrm{d}\mu = \int_{[0,1]} h_n\,\mathrm{d}\nu$, $n \geqslant 1$, où $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions « trapèzes » (donc continues) qui tend en décroissant vers $\mathbf{1}_{[a,b]}$, cf. figure 2. Par le théorème de convergence décroissante ($h_1 \leqslant 1$ et les constantes sont μ et ν-intégrables) ou de convergence dominée, on en déduit $\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{[a,b]}\,\mathrm{d}\mu = \int_{[0,1]} \mathbf{1}_{[a,b]}\,\mathrm{d}\nu$, c'est-à-dire $\mu([a,b]) = \nu([a,b])$.

Si $a = 0$ et $b < 1$ ou si $0 < a$ et $b = 1$, on procède comme ci-dessus en adaptant la définition de h_n (trapèze rectangle au lieu de trapèze isocèle). Enfin si $[a,b] = [0,1]$, la fonction $h = \mathbf{1}_{[0,1]}$ est continue sur $[0,1]$ et l'égalité $\mu([0,1]) = \nu([0,1])$ découle directement de l'hypothèse.

4.5 *Démontrer le théorème 4.*

D'après les trois premières questions de cette partie, pour tout $n \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\min(X_1,\dots,X_n) = \int_0^{+\infty} G(t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 nu^{n-1}G^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{[0,1]} nu^{n-1}\,\mathrm{d}\mu(u),$$

en notant μ la mesure bornée de densité G^{-1} par rapport à λ. En notant G_1 la fonction de survie de Y_1 et ν la mesure de densité G_1^{-1} par rapport à λ, l'hypothèse (24) du théorème peut se réécrire après division par n sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{[0,1]} u^k\,\mathrm{d}\mu(u) = \int_{[0,1]} u^k\,\mathrm{d}\nu(u).$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que pour tout polynôme q à coefficient réels, $\int_{[0,1]} q(u)\,\mathrm{d}\mu(u) = \int_{[0,1]} q(u)\,\mathrm{d}\nu(u)$. Par densité des fonctions polynômes dans l'espace $C[0,1]$ des fonctions continues sur $[0,1]$ (th. de Weierstrass Stone) et interversion limite intégrale pour la convergence uniforme dans le cas de mesures bornées, on étend cette égalité à toutes les fonctions continues $h : [0,1] \to \mathbb{R}$: $\int_{[0,1]} h(u)\,\mathrm{d}\mu(u) = \int_{[0,1]} h(u)\,\mathrm{d}\nu(u)$. Par la question précédente, ceci implique l'égalité des mesures μ et ν et donc l'égalité λ-p.p. de leurs densités G^{-1} et G_1^{-1}. En particulier si U suit la loi uniforme sur $]0,1[$, $G_1^{-1}(U) = G^{-1}(U)$ p.s. Or $G_1^{-1}(U)$ a même loi que Y et $G^{-1}(U)$ même loi que X (cf. justification ci-dessous) donc X et Y ont même loi.

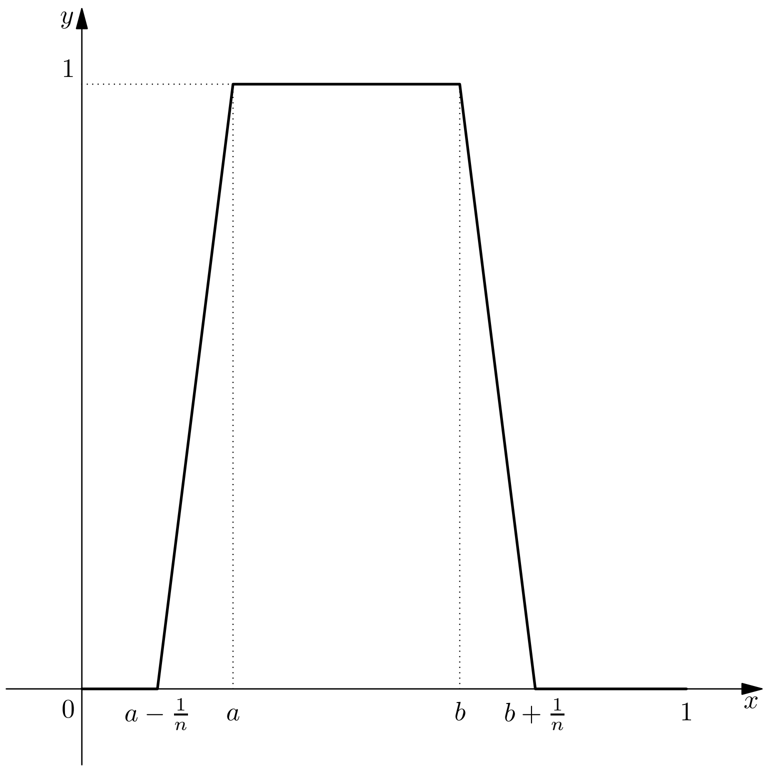

Figure 2 – Fonction trapèze h_n

Justification. On sait déjà que $F^{-1}(U)$ a même loi que X_1. On cherche à exprimer $G^{-1}(U)$ à l'aide de F^{-1} et de U. Soit u un réel arbitraire fixé dans $]0,1[$.

$$\begin{aligned} G^{-1}(u) = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ G(t) > u\} &= \sup\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ 1 - F(t) > u\} \\ &= \sup\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ F(t) < 1 - u\} \\ &= \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ F(t) \geqslant 1 - u\} \qquad (\star) \\ &= F^{-1}(1-u), \end{aligned}$$

sous réserve de justification de l' égalité $(\star)$.

Remarque. Si on modifie la définition de G^{-1} en prenant le supremum pour $t \in \mathbb{R}$ au lieu de $t \in \mathbb{R}_+$, les égalités ci-dessus restent valables en remplaçant partout $\mathbb{R}_+$ par $\mathbb{R}$. Si on s'en tient à la définition de l'énoncé avec le supremum pour $t \in \mathbb{R}_+$, complétée par la convention $\sup \varnothing = 0$, les égalités restent valables dans le cas particulier où $\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ G(t) > u\} = \varnothing$.

Vérification de $(\star)$. On pose pour $v \in]0,1[$, $I(v) := \{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ F(t) < v\}$ et $J(v) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ F(t) \geqslant v\}$ et on compare $a := \sup I(v)$ et $b := \inf J(v)$. Compte-tenu de la remarque précédente, il suffit de traiter le cas où $I(v) \neq \varnothing$. Notons d'abord que par monotonie de F, $I(v)$ et $J(v)$ sont des intervalles. Par continuité à droite de F, $F(b) \geqslant v$. Pour tout $t < a$, $F(t) < v \leqslant F(b)$ donc $F(t) < F(b)$, donc $t \notin J(v)$ donc

$t < b$. On en déduit que $a \leqslant b$. Supposons maintenant que $a < b$, alors $F(a) < v$ par la définition de b. Comme $a < b$, $a < (a+b)/2 < b$, alors $F((a+b)/2) \geqslant v$ par la définition de a comme borne supérieure de l'intervalle $I(v)$ et $F((a+b)/2) < v$ par la définition de b comme borne inférieure de $J(v)$. Ces deux inégalités étant contradictoires, l'hypothèse $a < b$ est impossible, d'où finalement $a = b$ et $(\star)$ est justifiée avec $v = 1-u$.

En notant que les variables aléatoires U et $1-U$ ont *même loi uniforme* sur $]0,1[$, on déduit de l'égalité $G^{-1}(u) = F^{-1}(1-u)$ pour tout $u \in]0,1[$ que $G^{-1}(U) = F^{-1}(1-U)$ a *même loi* que $F^{-1}(U)$, donc même loi que X_1.

4.6 *Le théorème reste-t-il vrai si* $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}Y_1 = +\infty$ *?*

D'après les questions 4.1 et 4.2, il suffit d'exhiber deux fonctions de survie G et H *distinctes* (ce qui implique que X_1 et Y_1 n'ont pas même loi) et telles que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \int_0^{+\infty} G(t)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} H(t)^n \,\mathrm{d}t = +\infty,$$

pour invalider la conclusion du théorème dans le cas $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}Y_1 = +\infty$. On peut prendre par exemple :

$$G(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < \mathrm{e}, \\ \frac{1}{\ln t} & \text{si } t \geqslant \mathrm{e}, \end{cases} \qquad H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < \mathrm{e}, \\ \frac{1}{(\ln t)^2} & \text{si } t \geqslant \mathrm{e}. \end{cases}$$

Fin du corrigé