Le but de ce problème est d'établir l'existence d'une mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour les applications dilatantes par morceaux de l'intervalle.

On rappelle quelques résultats et notations classiques de théorie de la mesure. Soient X un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{B}$ et μ une mesure positive sur $\mathcal{B}$. On considère la relation d'équivalence $\sim$ suivante sur les fonctions mesurables réelles sur $(X, \mathcal{B})$:

$$f \sim g \text{ si et seulement si } f(x) = g(x) \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ on notera $\dot{f}$ la classe d'équivalence de f. Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$) on considère $\mathcal{L}^p(\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables avec $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < +\infty$ (resp. $\|f\|_\infty := \inf_E \sup_{x \in E} |f(x)|$, où l'infimum porte sur les ensembles mesurables E satisfaisant $\mu(X \backslash E) = 0$) et l'ensemble quotient associé $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$. On rappelle que $\| \cdot \|_p$ induit une norme sur $L^p(\mu)$.

Une mesure signée (resp. une mesure signée finie) sur $\mathcal{B}$ est la différence de deux mesures positives, dont au moins une est finie (resp. la différence de deux mesures positives finies). Soient μ et ν deux mesures signées sur $\mathcal{B}$. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ si tout $A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) = 0$ vérifie aussi $\nu(A) = 0$. Si $T : X \to X$ est une application mesurable on notera $T^*\mu$ la mesure signée définie par $T^*\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$. L'application T est dite non-singulière par rapport à μ si $T^*\mu$ est absolument continue par rapport à μ.

Theorem 1 *(Radon-Nikodym) Soient μ une mesure positive finie et ν une mesure signée finie sur $\mathcal{B}$ telles que ν est absolument continue par rapport à μ. Alors il existe une unique fonction $f \in L^1(\mu)$, appelée la dérivée de Radon-Nikodym de ν relativement à μ, telle que ν soit la mesure à densité f par rapport à μ, notée $f \cdot \mu$, i.e. $\nu(A) = (f \cdot \mu)(A) := \int_A f \, d\mu$ pour tout $A \in \mathcal{B}$.*

Lorsque X est un intervalle de $\mathbb{R}$ on considère la tribu des boréliens $\mathcal{B}$ sur X. On notera alors $\mathcal{L}^p(X)$ et $L^p(X)$ pour $\mathcal{L}^p(m)$ et $L^p(m)$ avec m la mesure de Lebesgue sur X. On rappelle le critère de compacité suivant :

Theorem 2 *(Kolmogorov-Riesz) Soit $\mathcal{F}$ un sous ensemble de $L^1(\mathbb{R})$ tel que*

- *$\mathcal{F}$ est borné dans $L^1(\mathbb{R})$;*
- *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$,*

$$\int_{|t|>R} |f(t)|dt < \epsilon;$$

- *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour tout $|s| < h$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t+s) - f(t)|dt < \epsilon,$$

alors $\mathcal{F}$ est d'adhérence compact dans $L^1(\mathbb{R})$.

Nous utiliserons aussi dans ce problème les notations suivantes. Pour I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1(I)$ on notera :

- $f_J \in L^1(J)$ la restriction de f à J lorsque $J \subset I$, i.e. $f_J(x) = f(x)$ pour Lebesgue presque tout $x \in J$,
- $f^J \in L^1(J)$ le prolongement de f à J nul hors de I lorsque $J \supset I$, i.e. $f^J(x) = f(x)$ pour Lebesgue presque tout $x \in I$ et $f^J(x) = 0$ pour Lebesgue presque tout $x \in J \backslash I$.

Partie I : Fonctions à Variations bornées

Soit I un intervalle réel non réduit à un point. A toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ on associe la fonction $\mathcal{V}(f) : I \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in I$ par

$$\mathcal{V}f(x) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \ : \ N \in \mathbb{N}^*, \ x_0 < x_1 < ... x_{N-1} < x_N \leqslant x, \ x_0 \in I \right\}.$$

Le supremum $\sup_{x \in I} \mathcal{V}f(x)$ de la fonction $\mathcal{V}f$, que l'on notera $\mathcal{V}(f)$, est appelé la variation totale de f. Lorsque $\mathcal{V}(f)$ est fini, on dit que f est à variations bornées. On considère dans la suite l'ensemble $\mathcal{BV}(I)$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ à variations bornées.

I.1.a. Soit $f \in \mathcal{BV}(I)$. Montrer que les fonctions $\mathcal{V}f$ et $\mathcal{V}f - f$ sont des fonctions croissantes.

I.1.b. Montrer l'inclusion $\mathcal{BV}(I) \subset \mathcal{L}^\infty(I)$.

I.1.c. Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $f, g \in \mathcal{BV}(I)$, on a $\alpha f + g \in \mathcal{BV}(I)$ et :

$$\mathcal{V}(\alpha f + g) \leqslant |\alpha| \mathcal{V}(f) + \mathcal{V}(g).$$

On considère dans la suite l'ensemble $BV(I) \subset L^1(I)$ des classes de fonctions mesurables admettant un représentant dans $\mathcal{BV}(I) \cap \mathcal{L}^1(I)$, autrement dit, $f \in L^1(I)$ appartient à $BV(I)$ si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{BV}(I)$ tel que $\dot{g} = f$. De plus on note alors $V(f) := \inf\{\mathcal{V}(g), \ \dot{g} = f\}$ et $\|f\|_{BV} := \|f\|_1 + V(f)$.

1.2.a. Montrer que $BV(I)$ muni de $\|\cdot\|_{BV}$ est un espace vectoriel normé.

1.2.b. Vérifier que pour tout $f \in BV(I)$ on a

$$V(f) = \inf\{\mathcal{V}(g), \ \dot{g} = f \text{ et } \sup_{x \in I} |g(x)| = \|f\|_\infty\}.$$

I.2.c. Montrer que pour tout $f \in BV(I)$,

$$\|f\|_\infty \leqslant V(f) + \frac{\|f\|_1}{|I|},$$

où $|I| \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$ est la longueur de l'intervalle I.

1.3.a. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant I. Pour $f \in L^1(I)$ on rappelle que f^J désigne le prolongement de f à J nul hors de I. Montrer que pour tout $f \in L^1(I)$,

$$V(f^J) \leqslant V(f) + 2\|f\|_\infty.$$

I.3.b. Soit $f \in L^1(I)$. Montrer que pour tout $h > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f^{\mathbb{R}}(x+h) - f^{\mathbb{R}}(x)|dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^h |f^{\mathbb{R}}(x+(k+1)h) - f^{\mathbb{R}}(x+kh)|dx.$$

I.3.c. En déduire l'inégalité suivante pour tout $f \in BV(I)$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f^{\mathbb{R}}(x+h) - f^{\mathbb{R}}(x)|dx \leqslant hV(f^{\mathbb{R}}).$$

I.3.d. Conclure que, lorsque I est un intervalle borné, toute partie bornée de $(BV(I), \|\cdot\|_{BV})$ est d'adhérence compacte dans $(L^1(I), \|\cdot\|_1)$.

I.4.a. Soient $F \in \mathcal{BV}(I)$ et $G \in \mathcal{L}^\infty(I)$. Pour tout $(x, y, z) \in I^3$ avec $x \leqslant z \leqslant y$, montrer que

$$|(FG)(y) - (FG)(x)| \leqslant (\mathcal{V}F(y) - \mathcal{V}F(x)) \|G\|_\infty + |F(z)||G(y) - G(x)|.$$

1.4.b. On suppose de plus que G est K-lipschitzienne sur I, i.e. $|G(u)-G(v)| \leqslant K|u-v|$ pour tout $(u, v) \in I^2$. Montrer alors que pour tout $(x, y) \in I^2$ avec $x \leqslant y$ on a

$$|(FG)(y) - (FG)(x)| \leqslant (\mathcal{V}F(y) - \mathcal{V}F(x)) \|G\|_\infty + K \int_{[x,y]} |F(t)|dt.$$

1.4.c. Conclure que pour tout $f \in BV(I)$ et pour toute fonction g K-lipschitzienne et bornée sur I, on a $fg \in BV(I)$ et

$$V(fg) \leqslant V(f)\|g\|_\infty + K\|f\|_1.$$

Partie II : Opérateur de transfert

Soient X un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{B}$ et m une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}$. On considère dans cette partie une application mesurable $T : X \to X$ non-singulière par rapport à m.

II.1. Soit $f \in L^1(m)$. Vérifiez que la mesure signée $T^*(f \cdot m)$ est finie et absolument continue par rapport à m.

Pour $f \in L^1(m)$, on notera $P_T f \in L^1(m)$ la dérivée de Radon-Nikodym associée à $T^*(f \cdot m)$ relativement à m.

II.2. Montrer que $P_T f$ est l'unique élément de $L^1(m)$ tel que pour tout $g \in L^\infty(m)$,

$$\int_X (P_T f) \cdot g \, dm = \int_X f \cdot (g \circ T) \, dm.$$

L'opérateur $P_T : L^1(m) \to L^1(m)$ est appelé l'opérateur de transfert associé à (T, m).

II.3.a. Montrer que P_T est linéaire.

II.3.b. Soit $f \in L^1(m)$ avec $f \geqslant 0$. Montrer que $P_T f \geqslant 0$ puis que $\|P_T f\|_1 = \|f\|_1$.

II.3.c. En déduire que P_T est continue et calculer sa norme d'opérateur $|||P_T|||$ definie par $|||P_T||| := \sup_{\|f\|_1 = 1} \|P_T f\|_1$.

On dit qu'une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}$ est T-invariante, lorsque $T^*\mu = \mu$, i.e. $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$.

II.4.a. Montrer que si $f \cdot m$ est une mesure de probabilité T-invariante alors f est un point fixe de l'opérateur de transfert P_T.

II.4.b. Réciproquement montrer que si $f \geqslant 0$ est un point fixe non nul de P_T, alors $\left(\frac{f}{\int_X f dm}\right) \cdot m$ est une mesure de probabilité T-invariante absolument continue par rapport m.

Partie III : Inégalité de Lasota-Yorke pour des applications dilatantes par morceaux

Dans toute cette partie on considère une application $T : [0,1] \to [0,1]$ dilatante et C^2 par morceaux, i.e. il existe $0 = x_0 < x_1 < ... < x_d = 1$ et $\lambda > 1$ tels que pour tout $i = 1, ..., d$ la restriction T_i de T à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge par une fonction C^2 sur un voisinage de $[x_{i-1}, x_i]$ avec $\inf_{]x_{i-1}, x_i[} |T'(x)| > \lambda$. On notera $T_i^{-1} : T(]x_{i-1}, x_i[) \to]x_{i-1}, x_i[$ la fonction réciproque de T_i.

III.1. Vérifier que T est non-singulière par rapport à la mesure de Lebesgue m sur l'intervalle $[0,1]$ muni de la tribu borélienne.

III.2. Montrer que pour tout $f \in L^1([0,1])$, on a

$$P_T f = \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{f \circ T_i^{-1}}{T_i' \circ T_i^{-1}} \right)^{[0,1]}.$$

III.3.a. Montrer que pour tout $i = 1, ..., d$, il existe une constante $C_i > 0$, telle que pour tout $f \in BV^1([0,1])$

$$V\left(\frac{f \circ T_i^{-1}}{T_i' \circ T_i^{-1}} \right) \leqslant \frac{V(f_{]x_{i-1},x_i[})}{\lambda} + C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)| dt.$$

III.3.b. En déduire que $P_T(BV([0,1])) \subset BV([0,1])$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in BV([0,1])$

$$\|P_T f\|_{BV} \leqslant \frac{3}{\lambda} \|f\|_{BV} + C\|f\|_1.$$

III.4.a. On suppose tout d'abord $\lambda > 3$. On note $\mathbf{1}$ la fonction indicatrice de $[0,1]$. Montrer que pour tout entier n

$$\|(P_T)^n \mathbf{1}\|_{BV} \leqslant \left(\frac{3}{\lambda}\right)^n + \frac{C\lambda}{\lambda - 3}.$$

III.4.b. Montrer que toute valeur d'adhérence dans $L^1([0,1])$ de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(P_T)^k \mathbf{1}\right)_n$ est un point fixe de P_T.

III.4.c. Conclure qu'il existe une mesure de probabilité T-invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m sur $[0,1]$.

III.5. Etablir l'existence d'une telle mesure dans le cas général $\lambda > 1$ (on pourra considérer une itérée T^p de T avec p assez grand).

Partie IV : Mélange pour $x \mapsto 2x \ mod(1)$

Dans cette partie on considère l'application $T_2 : [0,1] \to [0,1]$ *qui à* x *associe* $2x$ *modulo* 1.

IV.1. Montrer que pour tout $f \in L^1([0,1])$ on a pour Lebesgue presque tout $x \in [0,1]$

$$P_{T_2}f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

Montrer que la mesure de Lebesgue m sur $[0,1]$ est une mesure de probabilité T_2-invariante.

IV.2. Etablir pour tout $f \in BV([0,1])$ l'inégalité suivante :

$$\|f - \mathbf{1}\int_0^1 f\ dm\|_1 \leqslant V(f).$$

IV.3. Montrer que pour tout $f \in BV([0,1])$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$V\left((P_{T_2})^n f\right) \leqslant \frac{V(f)}{2^n},$$

puis

$$\|(P_{T_2})^n f - \mathbf{1}\int_0^1 f\ dm\|_1 \leqslant \frac{V(f)}{2^n}.$$

IV.4. En déduire que m est l'unique mesure de probabilité T_2-invariante absolument continue par rapport à m.

IV.5. Montrer que pour tout $f, g \in L^2([0,1])$,

$$\left|\int_0^1 f \cdot (g \circ T_2^n)\ dm - \left(\int_0^1 f\ dm\right) \cdot \left(\int_0^1 g\ dm\right)\right| \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

FIN DE L'EPREUVE