Mathématiques générales
Second concours session 2014
ENS Cachan

Rapport du jury

1 Description du sujet

Ce sujet était composé de trois parties totalement indépendantes.

La première partie était un exercice classique de type interrogation orale. Il fallait établir que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ si et seulement si l'intervalle $[a,b]$ ne contient pas de nombre entier. La condition nécessaire s'obtenait très facilement (question 1). Pour la condition suffisante, il fallait étudier une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ et montrer la convergence simple puis uniforme vers la constante $1/2$. On approchait alors toutes les constantes réelles et les polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On concluait en utilisant le théorème de Weierstrass.

Dans la seconde partie, on étudiait les fonctions de Green dans les domaines simplement connexes de $\mathbb{R}^2$. On vérifiait tout d'abord dans les questions 1 que le logarithme est la solution fondamentale du laplacien dans le plan entier. Ensuite, on donnait un noyau dans la boule unité, construit à partir de la méthode des images $y^* = y/|y|^2$. L'objectif des questions 2 était de démontrer que G_D est bien une fonction de Green (avec condition de Dirichlet). Le reste du problème consistait à adapter cette formule explicite pour l'intérieur du disque unité à n'importe quel ouvert borné simplement connexe. Cette formule s'écrivait via les applications conformes. On redémontrait les équations de Cauchy-Riemann dans les questions 3. Enfin, dans les questions 4, on remarquait qu'une fonction holomorphe est un bon changement de variable pour le problème de Laplace.

L'objectif de la troisième partie était de trouver l'ensemble des champs de vecteurs $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ solutions du problème elliptique (1). Dans les questions 1, on construisait une solution à partir de la solution du problème de Laplace (2). En question 1.d., on remarquait que le problème elliptique avait une infinité de solution dans le cas où Ω était un anneau. Il est alors important d'étudier l'espace des champs harmoniques, ce qui est fait durant le reste du sujet. Cette étude est reliée à la décomposition de Hodge-DeRham. Dans le cas où Ω est l'extérieur de N compacts, nous construisions deux bases de l'ensemble des champs harmoniques et la matrice de changement de base. Nous terminions alors par la démonstration du Théorème 4 avec la décomposition dite de Biot-Savart.

2 Statistiques de l'épreuve

Les tableaux suivants donnent la répartition des notes en fonction des parties du sujet :

première partie (note ramenée sur 20)

Notes	de 0 à 5	de 5 à 10	de 10 à 15	de 15 à 20
Nombre de candidats	1	2	22	42

deuxième partie (note ramenée sur 20)

Notes	de 0 à 5	de 5 à 10	de 10 à 15	de 15 à 20
Nombre de candidats	8	26	26	7

troisième partie (note ramenée sur 20)

Notes	de 0 à 5	de 5 à 10	de 10 à 15	de 15 à 20
Nombre de candidats	38	20	9	0

Au final, les notes sont réparties comme ceci :

note finale

Notes	de 0 à 5	de 5 à 10	de 10 à 15	de 15 à 20
Nombre de candidats	2	17	32	16

3 Commentaires du correcteur

Première partie.

L'objectif de la première partie était de proposer un exercice relativement facile pour faire un premier tri parmi les candidats. On voulait vérifier que les candidats savaient utiliser les éléments de base de l'analyse (convergence simple, uniforme, utilisation des quantificateurs). Presque tous les candidats ont traité parfaitement cette partie, ce qui montre que les candidats sont d'un bon niveau. Néanmoins, quelques candidats ont consacré *trop* de temps sur cette partie, rédigeant avec beaucoup trop de détails. Ces personnes n'ont presque pas abordé les parties suivantes ce qui est regrettable. Pour une question de temps, il faut trouver un équilibre entre une bonne rédaction et la concision.

Question 2b : de nombreux candidats ont essayé d'appliquer un théorème de point fixe alors qu'il suffisait de faire une étude standard de suite (suite croissante et majorée, elle est donc convergente vers ℓ ; par continuité de p, ℓ est un point fixe de p, ce qui n'est possible que pour $\ell = 1/2$). Nous avons aussi souvent retrouvé dans les copies "p croissante $\Rightarrow\ x_{n+1} = p(x_n) \geq x_n$" ce qui est évidemment faux.

Question 4b : il y a eu très peu de preuves rigoureuses avec les parties entières.

Question 5 : la translation par un entier n'a pas toujours été bien faite.

Deuxième partie.

La seconde partie a été plutôt bien traitée.

Question 4b : de nombreuses personnes n'ont pas su dériver une composée $\nabla(\tilde{\varphi} \circ \tilde{T})$.

Question 4d : traitée par personne.

Troisième partie.

Comme prévu, la troisième partie n'a été abordée que par les meilleurs candidats. Beaucoup se sont arrêtés à la question 4b, sûrement pour une question de temps.

Question 1c : il a été très difficile d'expliquer pourquoi $\nabla^\perp \psi_0 \cdot n = 0$. Une démonstration aurait pu être faite en introduisant une paramétrisation de chaque composante connexe du bord $\Gamma : \mathbb{R} \to \partial\Omega$ et de remarquer que

$$\nabla^\perp \psi_0 \cdot n = -\nabla \psi_0 \cdot \tau = -(\nabla \psi_0)(\Gamma(t)) \cdot \frac{\Gamma'(t)}{|\Gamma(t)|} = -\frac{(\psi_0 \circ \Gamma)'(t)}{|\Gamma(t)|} = 0$$

car $\psi_0 = 0$ sur le bord.

Question 1d : cette question a été très bien traitée.

Question 2 : cette question a été mal abordée, alors qu'il suffisait de suivre l'indication et utiliser la Proposition 3 : $|u|^2 = u \cdot \nabla p$ puis la formule de Stokes (u étant tangent et à divergence nulle).

Question 3b : question apparemment difficile... Pour montrer que la famille était génératrice, il suffisait d'appliquer la Proposition 2 et l'unicité du Théorème 1. Pour montrer que la famille était libre, il fallait remarquer que $\nabla(\sum \lambda_i g_i) = 0 \Rightarrow \sum \lambda_i g_i$ est constant, et que cette constante sur $\partial\widetilde{\Omega}$ est forcément zéro, d'où $\sum \lambda_i g_i|_{\partial K_j} = \lambda_j = 0$.

Question 4d : seulement trois candidats ont compris qu'il fallait montrer que $X^T M(g) X$ est positif (et nul si et seulement si $X = 0$). Les autres ne savent pas ce que veut dire "définie positive". Cette question était l'une des plus difficiles car il fallait le déduire de ceci

$$X^T M(g) X = \sum_{i,j} x_i x_j \int \nabla g_i \cdot \nabla g_j = \int \Big| \sum_i x_i \nabla g_i \Big|^2.$$

Question 4e : un seul candidat est arrivé à montrer que l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique, et personne n'a montré que $C_{i,i} < 0$. Il est pourtant facile de voir par diagonalisation dans une base orthonormée que l'inverse d'une matrice symétrique définie positive est symétrique définie positive, et que $C_{i,i} = e_i^T C e_i = -e_i^T M(g)^{-1} e_i < 0$.

Question 5a : question qui est peut être la plus dure du sujet et qui fut correctement traitée par un candidat. Il fallait pour cela introduire g_i (comme pour la question 4c d'ailleurs) puis utiliser plusieurs fois la formule de Stokes.