2C3121
Mathématiques générales
Second concours session 2013
ENS Cachan : rapport

Le sujet est inspiré de "Polynomials and polynomial inequalities" de P. Borwein et T. Erdélyi, Springer 1995. La partie 2 est tirée du livre "Analyse réelle et complexe" de W. Rudin, Dunod 1998.

Le sujet concernait l'étude de la densité d'un sous-espace des fonctions continues. Plus précisément, étant donnée $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement croissante de réels tels que

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \dots, \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty,$$

on définit

$$\mathcal{E}_\Lambda = \Big\{ [0,1] \ni x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k} \; ; a_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \Big\} \subset \mathcal{C}\big([0,1];\mathbb{R}\big),$$

que l'on munit de la norme de la convergence uniforme.

- Dans la partie 1, on montre que si $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$ alors $\mathcal{E}_\Lambda$ est dense dans $\mathcal{C}\big([0,1];\mathbb{R}\big)$.
- Dans la partie 2, on montre que si $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$ alors $\mathcal{E}_\Lambda$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}\big([0,1];\mathbb{R}\big)$.
- Dans la partie 3 on établit des propriétés de l'adhérence de $\mathcal{E}_\Lambda$ dans le cas non dense.

Les notions abordées sont : analyse générale, suites et séries de fonctions, analyse complexe (produit de fonctions holomorphes), calcul intégral.

Conclusion : Le sujet était très long avec un certain nombre de questions techniques et comportait des parties indépendantes qui appelaient des notions différentes de l'analyse. Certains candidats ont sauté une partie pour attaquer la suivante et ils ont bien fait (d'autres ont essayé de glaner ici et là une question facile, mais cette stratégie n'a pas été payante). Le niveau général des candidats est assez satisfaisant, même si le correcteur pensait qu'ils iraient plus loin dans le sujet. Notons que deux candidats ont tout de même traité avec succès 80% des questions.

1 Théorème de Müntz dans le cas dense

Cette partie a été bien traitée en général, à l'exception de la question 2. On pouvait raisonner par récurrence, mais il fallait supposer $m \notin \Lambda$ pour faire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 Q_{n-1}(t)t^{-1-\lambda_n}\mathrm{d}t$. Si $m \in \Lambda$ le résultat est évident.

2 Théorème de Müntz dans le cas non dense

Cette partie a été abordée par l'ensemble des candidats

Question 2 : L'énoncé comportait une erreur de signe que certains candidats ont relevés.

Question 4 : Peu de candidats ont justifié le passage à la limite

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{+R}\frac{f(-1+is)}{-1+is-z}\mathrm{d}s \longrightarrow -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(-1+is)}{-1+is-z}\mathrm{d}s, \quad R\longrightarrow +\infty.$$

Question 6 : On utilise la question 5, mais il ne suffisait pas de dire que $t^z F(t) \in L^1([0,1])$ pour appliquer le théorème de Fubini. On pouvait écrire pour $\operatorname{Re} z > -1$,

$$\left|t^z f(-1+is)\mathrm{e}^{-is\ln t}\right| \leqslant \frac{t^{\operatorname{Re} z}}{1+s^2},$$

donc $(t,s)\mapsto t^z f(-1+is)\mathrm{e}^{-is\ln t} \in L^1([0,1]\times\mathbb{R})$ et appliquer le théorème de Fubini.

3 Description de $\overline{\mathcal{E}_\lambda}$ dans le cas non dense

Les quelques candidats qui ont abordé cette partie, l'ont fait avec succès.

Question 1(c) : Cette question n'a été traitée que par peu de candidats

Chacune des questions de la partie a été traitée par au moins une personne, à l'exception de la question suivante, dont voici un corrigé.

Question 7 : On remarque que $\sin i = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e})$, donc $|\sin i| > 1$ et $(\sin i)^4 \in \mathbb{R}^+$. Ainsi pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$0 \leqslant 1 - \Big(\frac{\sin(t/\lambda_k)}{\sin i}\Big)^4 \leqslant 1,$$

et

$$0 \leqslant \prod_{k=N+1}^{+\infty}\Big(1-\Big(\frac{\sin(t/\lambda_k)}{\sin i}\Big)^4\Big) \leqslant 1.$$

Ensuite

$$\big(1-\frac{t}{i\lambda_k}\big)\frac{\sin(At)}{At} = \frac{\sin(At)}{At} - \frac{\sin(At)}{i\lambda_k A},$$

d'où l'on déduit

$$\big|\big(1-\frac{t}{i\lambda_k}\big)\frac{\sin(At)}{At}\big| \leqslant 1 + \frac{1}{\lambda_k A} = 1 + \frac{1}{\sigma_k},$$

car pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$ et $|\sin x| \leqslant 1$. On conclut facilement.

4 Appendice : Densité des fractions de Müntz

Pour aller plus loin on propose un prolongement du sujet. À nouveau on considère $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement croissante de réels tels que

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \ldots, \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty}\lambda_k = +\infty.$$

Dans cette partie on démontre le résultat suivant

Théorème : Soit Λ une suite vérifiant la condition (1) du sujet. Alors l'ensemble

$$R_\Lambda := \Big\{ x \mapsto \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k}}{\sum_{k=0}^n b_k x^{\lambda_k}} \; ; a_k, b_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \Big\}$$

est dense dans $\mathcal{C}$.

On fixe $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon > 1/n$.

1. Soit $x_0 \in]0,1[$. Montrer que si $j \in \mathbb{N}$ est assez grand, la fonction $Z \in \mathcal{E}_\Lambda$ définie par

$$Z(x) = \frac{\varepsilon}{2} + \big(\frac{x}{x_0}\big)^{\lambda_j}, \quad \lambda_j \in \Lambda,$$

   vérifie

$$\begin{array}{rcll} Z(x) & > & 0, & x \in [0,1] \\ Z(x) & \leqslant & \varepsilon, & 0 \leqslant x < x_0 - \varepsilon \\ Z(x) & \geqslant & \varepsilon^{-1}, & x_0 + \varepsilon < x \leqslant 1. \end{array}$$

2. On fixe une fonction $Z_0 \in \mathcal{E}_\Lambda$ strictement positive. Montrer qu'il existe des fonctions strictement positives $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \in \mathcal{E}_\Lambda$ telles que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{array}{ll} Z_k(x) \leqslant \varepsilon Z_{k-1}(x), & x < \frac{k}{n} - \varepsilon \\ Z_k(x) \geqslant \varepsilon^{-1} Z_{k-1}(x), & x > \frac{k}{n} + \varepsilon. \end{array}$$

   Pour un tel choix de $(Z_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, on définit

$$\Delta_k := \frac{Z_k}{\sum_{j=0}^n Z_j}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

3. (a) Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\Delta_k(x) > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \Delta_k(x) = 1.$$

   (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ |k/n - x| > \varepsilon}}^{n} \Delta_k(x) \leqslant 2\varepsilon.$$

4. Soit $f \in \mathcal{C}$. On définit

$$f_n = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \Delta_k.$$

   (a) Montrer qu'il existe $\delta_\varepsilon > 0$ avec $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon = 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \delta_\varepsilon.$$

   (b) Conclure.