École Normale Supérieure de Cachan
Concours d'entrée en troisième année
Mathématiques - Session 2013

Rapport sur l'épreuve II.B : Analyse numérique

1 Description du sujet

Ce sujet d'analyse numérique traite de plusieurs aspects de la théorie de l'image et du rayon numériques des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert H, et étudie plusieurs applications. Il a été conçu pour être progressif et permettre au maximum de candidats de montrer leurs connaissances et leurs savoir-faire mathématiques.

Le sujet se compose de quatre parties. La première donne quelques définitions et les toutes premières propriétés, utiles pour la suite, de l'image numérique. Les candidats sont invités à y démontrer, en admettant un résultat dit "d'inclusion spectrale" (qui sera démontré indépendamment dans la partie 4), un premier résultat dit "d'inégalité de puissance" : si $T \in \mathcal{L}(H)$ a un rayon numérique inférieur à 1, alors il en est de même de toutes ses puissances entières positives. La deuxième partie est consacrée à montrer, à l'aide du rayon numérique, et du résultat d'inégalité de puissance démontré dans la partie précédente, qu'une certaine condition CFL (7)[1] (impliquant le rayon spectral de deux matrices symétriques réelles de taille 2×2) est suffisante pour assurer la stabilité L^2 d'un schéma de Lax-Wendroff (6) pour un problème système hyperbolique linéaire à deux inconnues (5), posé sur $\mathbb{R}^2$. La troisième partie propose l'étude de l'image numérique des matrices 2×2 à coefficients complexes, montrant en particulier que celle-ci est toujours l'enveloppe convexe d'une ellipse du plan complexe (éventuellement dégénérée en un segment ou un point), dans le but d'utiliser ces résultats pour démontrer le thérorème de Toeplitz-Hausdorff : si $T \in \mathcal{L}(H)$, alors son image numérique est une partie convexe du plan complexe. Cette partie se termine par une application de ce théorème aux matrices carrées à coefficient complexes : toute telle matrice de trace nulle est unitairement semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls. Enfin, la quatrième partie, peut-être un peu plus difficile, propose la démonstration indépendante du théorème d'inclusion spectrale utilisé dans la partie 1 (et, indirectement, dans la partie 2) : si $T \in \mathcal{L}(H)$, alors le spectre de T est contenu dans l'adhérence de l'image numérique de T.

2 Statistiques de l'épreuve

Cette épreuve a été traitée par 29 candidats. Les notes, sur 20, s'échelonnent de $5,99$ à 20. Au total, 4 candidats obtiennent plus de 17 points, 8 candidats ont plus de 13 points, et 17 candidats ont une note supérieure à 10 points. La note moyenne des 29 candidats est de $11,4$. L'écart type, quant à lui, est de $3,53$ points.

[1] Les numéros des équations renvoient à ceux utiliés dans le sujet lui-même.

3 Commentaires du correcteur

Cette épreuve a contribué à classer les candidats au concours d'entrée en troisième année, dans la mesure où elle a permis à un certain nombre de bons et de très bons candidats de s'exprimer sans épuiser la totalité du sujet, elle a permis aux candidats moyens de donner la mesure de leurs connaissances et de leurs capacités sur des questions d'un niveau raisonnable, et elle a permis également de mettre en lumière certaines lacunes et difficultés chez des candidats faibles ou très faibles.

Le correcteur a été positivement supris de constater que les questions calculatoires de la partie 2 n'ont pas effrayé les candidats. En revanche, certaines questions assez élémentaires du début de la partie 3 ont rebuté les candidats et n'ont été traitées que dans un nombre très faible de copies. Certaines questions, un peu fines comme 2.1.*b*, difficiles comme celles de la partie 4.3, ou synthétiques comme celle de la partie 4.4, n'ont presque jamais été traitées convenablement. Les toutes premières questions de la partie 1 ont permis de mettre en évidence la grande faiblesse des moins bons candidats.

Après correction des 29 copies, quelques remarques, d'abord générales puis plus mathématiques, s'imposent, qui pourraient aider les futurs candidats à ce concours :

- Lorsque l'on rédige des mathématiques, et en particulier à destination d'un correcteur de copies de concours, il est toujours payant de faire des phrases, dans un français le plus grammaticalement correct possible, pour introduire un calcul, détailler un raisonnement, ou conclure une question. Trop de questions n'ont trouvé, chez trop de candidats, pour unique réponse, qu'une longue succession de calculs sans explications.

- Avant tout calcul, il est recommandé d'introduire les notations correspondant aux objets qui ne sont pas introduits dans le sujet lui-même, ceci tant pour aider le correcteur à la compréhension que le candidat à la maîtrise de la rigueur de son raisonnement. Les questions "Quel objet mathématique désigne cette lettre ?" et "Dans quel ensemble ou espace ce paramètre évolue-t-il ?" ne doivent jamais se poser : leur réponse doit figurer explicitement dans chacune des réponses des candidats.

- Quand on utilise dans la réponse à une question un résultat qui porte un nom (par exemple "La formule de Taylor-Young"), il est recommandé, d'une part, de citer le nom du résultat, et d'autre part de justifier explicitement que les hypothèses de ce résultat sont vérifiées dans la situation que l'on souhaite traiter.

- Quelques confusions sont revenues trop souvent dans les copies des candidats, parmi lesquelles :

  - Contrairement à ce qui se passe lorsque la dimension de H est finie, en général, le fait, pour $T \in \mathcal{L}(H)$, de posséder un inverse à droite n'est pas équivalent à celui de posséder un inverse à gauche.
  - C'est souvent une bonne idée de travailler avec le carré de la norme dans un espace de Hilbert, mais il ne faut pas oublier d'écrire le carré en question, sinon le raisonnement devient faux.
  - Dès la toute première question, les candidats pouvaient remarquer que, pour $T \in \mathcal{L}(H)$, $w(T) \leq \|T\|$ et, avec le résultat d'inclusion spectrale, $\rho(T) \leq w(T) \leq \|T\|$. Trop de candidats ont pris ces inégalités pour des égalités.