École Normale Supérieure de Cachan – Second concours 2013
Corrigé (non officiel) du sujet 2 : Analyse numérique

19 août 2013

Table des matières

1 Généralités concernant image et rayon numériques

1.1 Quelques généralités

1.1.a L'ensemble $\mathrm{vp}(T)$ est non vide, soit $\lambda \in \mathrm{vp}(T)$. Il existe $x \in H$, $x \neq 0$ tel que $T(x) = \lambda x$, posons $y = \dfrac{x}{||x||}$, on a $\langle y, Ty \rangle = \lambda$ donc $\lambda \in W(T)$. Ainsi $W(T)$ est un ensemble non vide contenant $\mathrm{vp}(T)$.
L'operateur T est continu, donc pour tout $x \in H$, $||x|| = 1$ on a $|\langle x, T(x) \rangle| \leqslant ||x||.|||T|||.||x|| = ||T||$. Ainsi $W(T)$ est un ensemble borné.

1.1.b L'ensemble des modules des éléments de $W(T)$ est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$, non vide et majoré, ainsi $w(T)$ est un nombre réel positif ou nul.

1.1.c Lorsque H est de dimension finie, sa sphère unité est compacte. De plus l'application de H dans $\mathbb{C}$ qui $x \mapsto \langle x, T(x) \rangle$ est continue comme composée d'applications continues, donc l'ensemble $W(T)$ est compact.

1.1.d Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in H$, avec $||x|| = 1$ on a, par linéarité en la seconde variable du produit scalaire hermitien, $\langle x, (\alpha T + \beta I)(x) \rangle = \alpha \langle x, T(x) \rangle + \beta$. Donc $W\big((\alpha T + \beta I)\big) = \alpha W(T) + \beta$.

1.1.e Pour tout $x \in H$, avec $||x|| = 1$ on a $\langle x, T^\star(x) \rangle = \langle T(x), x \rangle = \overline{\langle x, T(x) \rangle}$, donc $W(T^\star) = \overline{W(T)}$.

1.2 Lien avec l'image numérique matricielle

1.2.a Soit $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_d\}$ une base orthonormée de H et $M = (m_{i,j})$ la matrice de T dans $\mathscr{B}$.
Soit x un vecteur unitaire de H, notons $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$. On a $T(e_j) = \sum_{i=1}^{d} t_{i,j} e_j$.
Notons $X = (x_1, \ldots, x_d)^t$. Alors $||X|| = 1$, de plus on a $\langle x, Tx \rangle = \sum_{i,j=1}^{d} x_i{}^\star t_{i,j} x_j = X^\star M X$. De plus, lorsque x parcourt l'ensemble des vecteurs unitaires de H, alors X parcourt la sphère unité de $\mathbb{C}^n$. Donc $W(T) = W(M)$.

1.2.b Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Notons T l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont M représente la matrice dans la base canonique, notée $\{e_1, e_2\}$. Cette base est orthonormée donc $W(T) = W(M)$, d'après la question précédente.
Notons $\mathscr{B}$ la base $\{e_1, 2e_2\}$, et N la matrice de T dans $\mathscr{B}$. On a $N = I_2$, donc $W(N) = \{1\}$.
Or $e_1{}^\star M e_1 = 1$ et $e_2{}^\star M e_2 = 2$, donc $W(T) \neq W(N)$.

1.3 Le théorème d'inégalité de puissance

1.3.a L'inégalité étant triviale si $x = 0$, quitte à remplacer x par $x/||x||$ il suffit de montrer l'équivalence pour tout vecteur x unitaire.
Supposons $\omega(T) \leqslant 1$, pour tout $z \in D$ et tout $x \in H$ unitaire, on a $\mathrm{Re}\langle x, (I - zT)x \rangle = \mathrm{Re}(1 - z\langle x, Tx \rangle \geqslant 0$, car $|z\langle x, Tx \rangle| < 1$.
Réciproquement, si $\omega(T) > 1$, il existe $x \in H$ unitaire tel que $|\langle x, Tx \rangle| > 1$. Notons $\langle x, Tx \rangle = re^{i\theta}$, avec $r > 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Soit$z = \dfrac{e^{-i\theta}}{\sqrt{r}}$, alors $\langle x, (I - zT)x \rangle = 1 - \sqrt{r} < 0$.

1.3.b Supposons qu'il existe $x \in \mathrm{Ker}(I - zT) \setminus \{0\}$, posons $u = x/||x||$, alors $\langle u, Tu \rangle = 1/z$, ce qui contredit l'hypothèse $\omega(T) \leqslant 1$. Ainsi $I - zT$ est injective.
Pour tout $x \in H$ unitaire on a $||(I - zT)x|| \geqslant |\langle x, (I - zT)x \rangle| \geqslant \big(1 - |z|\omega(T)\big)||x||$, or $|z|\omega(T) < 1$ donc $\mathrm{Im}(I - zT)$ est fermée (comme on le montre dans la question 4.1.a, de deux façons [1]).

1. L'auteur du problème avait sans doute une autre solution à l'esprit.

De plus si $y \in \operatorname{Im}(I-zT)^{\perp}$, alors $\langle y,(I-zT)y\rangle = 0$ ce qui implique $y=0$, donc $H = \operatorname{Im}(I-zT)^{\perp\perp} = \operatorname{Adh}\big(\operatorname{Im}(I-zT)\big) = \operatorname{Im}(I-zT)$. Ainsi $I-zT$ est surjective, elle est donc bijective.
Or $I-zT$ est linéaire, donc d'après un théorème de Banach (conséquence directe du théorème de l'application ouverte) $I-zT$ est inversible dans $\mathscr{L}(H)$.

1.3.c D'après la question précédente $I-zT$ est inversible, on a donc :
$(\forall z \in D, \forall x \in H, \operatorname{Re}\langle x,(I-zT)x\rangle \geqslant 0) \iff (\forall z \in D, \forall y \in H, \operatorname{Re}\langle (I-zT)^{-1}y, y\rangle \geqslant 0)$.
Or $\operatorname{Re}\langle (I-zT)^{-1}y,y\rangle = \operatorname{Re}\overline{\langle y,(I-zT)^{-1}y\rangle}$, d'où l'équivalence demandée.

1.3.d La décomposition en éléments simple dans $\mathbb{C}(X)$ de $\dfrac{1}{X^n-1}$ s'écrit $\dfrac{1}{X^n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{X-\omega^k}$ avec $a_k = \dfrac{1}{n\omega^{k(n-1)}} = \dfrac{\omega^k}{n}$. Donc $\dfrac{1}{1-X^n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-\omega^k X}$.
On a donc, dans $\mathbb{C}(X)$, *a priori*, $1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-X^n}{1-\omega^k X} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}(1-\omega^j X)$.
Chaque terme de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}(1-\omega^j X)$ appartient à $\mathbb{C}[X]$, donc on a $1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}(1-\omega^j X)$ dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$.

1.3.e On a $\omega^k z \in D$, donc en appliquant la question 1.3.c on obtient l'inversibilité de $I-\omega^k zT$.
Un produit fini d'éléments inversibles de $\mathscr{L}(H)$ est inversible, donc $I-z^nT^n$ est inversible, car $I-z^nT^n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(I-\omega^k zT)$.
En appliquant la relation (3)[2] à l'endomorphisme T et en multipliant l'égalité des deux cotés par $(I-z^nT^n)^{-1} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(I-\omega^k zT)^{-1}$, on obtient l'égalité (4)[3].

1.3.f Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$.
D'après les questions 1.3.a,b et c on a $\forall k \in [\![0,n-1]\!], \forall z \in D, \forall x \in H, \operatorname{Re}\langle x,(I-\omega^k zT)^{-1}x\rangle \geqslant 0$.
Donc $\forall z \in D, \forall x \in H, \operatorname{Re}\langle x,(I-\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k zT)^{-1}x\rangle \geqslant 0$.
D'où $\forall z \in D, \forall x \in H, \operatorname{Re}\langle x,(I-z^nT^n)^{-1}x\rangle \geqslant 0$, d'après 1.3.c et donc $\omega(T^n) \leqslant 1$ d'après 1.3.a.

2 Application à la stabilité d'un schéma de Lax-Wendroff

2.1 Une transformation de Fourier

2.1.a Les S_i sont à valeurs dans H_1.
Pour tout $u \in H_1$, on a $||S_1(u)||^2 = \displaystyle\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}[S_1(u)]_{k,\ell} = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}[u]_{k+1,\ell} = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}[u]_{k,\ell} = ||u||^2$. De même $||S_2(u)||^2 = \displaystyle\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}[S_2(u)]_{k,\ell} = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}[u]_{k,\ell+1} = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}[u]_{k,\ell} = ||u||^2$.
Notons V_1 et V_2 les opérateurs de H_1 définis par $\forall (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $[V_1(u)]_{k,\ell} = (u^1_{k-1,\ell}, u^2_{k-1,\ell})^t$ et $[V_2(u)]_{k,\ell} = (u^1_{k,\ell-1}, u^2_{k,\ell-1})^t$.
Un calcul immédiat fournit, pour tout $u \in H_1$, $S_1 \circ V_1(u) = V_1 \circ S_1(u) = u$ et $S_2 \circ V_2(u) = V_2 \circ S_2(u) = u$.
Donc pour $i=1$ ou $i=2$ les S_i sont des bijections isométriques de H_1 et leurs inverses sont les V_i.

2. On utilise ici la numérotation de l'énoncé.
3. Ditto.

2.1.b On étend $\mathscr{F}$, naturellement, comme la limite dans H_2 des sommes partielles de
$\left(\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u^1_{k,\ell}e^{-ik\eta-i\ell\xi}, \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u^2_{k,\ell}e^{-ik\eta-i\ell\xi}\right)^t$.
La formule de Parseval montre que $\mathscr{F}$ est une isométrie de H_1 vers H_2.
Les coefficients de Fourier de $\mathscr{F}(u)$ sont les $[u]_{(k,\ell)}$ ce qui prouve l'unicité et montre que $\mathscr{F}$ est une bijection de H_1 dans H_2.

2.1.c Soit $u\in H_1$. Pour tout $(\eta,\xi)\in]0,2\pi[^2$ on a
$\mathscr{F}\big(S_1(u)\big)(\eta,\xi) = \left(\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u^1_{k-1,\ell}e^{-ik\eta-i\ell\xi}, \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u^2_{k-1,\ell}e^{-ik\eta-i\ell\xi}\right)^t = e^{-i\eta}\mathscr{F}(u)(\eta,\xi).$
$\mathscr{F}\big(S_2(u)\big)(\eta,\xi) = \left(\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u^1_{k,\ell-1}e^{-ik\eta-i\ell\xi}, \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u^2_{k,\ell-1}e^{-ik\eta-i\ell\xi}\right)^t = e^{-i\xi}\mathscr{F}(u)(\eta,\xi).$

2.2 Un schéma de Lax-Wendroff pour un système hyperbolique linéaire

2.2.a Un développement de Taylor-Young de z en la variable t, à l'ordre 3 fournit, lorsque $h\in\mathbb{R}$ tend vers 0 :

$$z(t+h,x,y) = z(t,x,y) + h\partial_t z(t,x,y) + \frac{h^2}{2}\partial_t^2 z(t,x,y) + \mathscr{O}(h^3).$$

Or $\partial_t z(t,x,y) = A\partial_x z(t,x,y) + B\partial_y z(t,x,y)$, et $\partial_t^2 z(t,x,y) = A\partial_x\partial_t z(t,x,y) + B\partial_y\partial_t z(t,x,y) = A^2\partial_x^2 z(t,x,y) + (AB+BA)\partial_x\partial_y z(t,x,y) + B^2\partial_y^2 z(t,x,y)$. L'intervertion des dérivées partielles étant justifiée par le fait que z est $\mathscr{C}^\infty$.
Donc

$$z(t+h,x,y) = z(t,x,y) + h\big(A\partial_x z(t,x,y) + B\partial_y z(t,x,y)\big) + \frac{h^2}{2}\big(A^2\partial_x^2 z(t,x,y) + (AB+BA)\partial_x\partial_y z(t,x,y) + B^2\partial_y^2 z(t,x,y)\big) + \mathscr{O}(h^3).$$

2.2.b On a

$$T = I + \frac{1}{2}aA(S_1 - {S_1}^{-1}) + \frac{1}{2}bB(S_2 - {S_2}^{-1}) + \frac{1}{2}a^2A^2(S_1 - 2I + {S_1}^{-1}) + \frac{1}{2}b^2B^2(S_2 - 2I + {S_2}^{-1}) + \frac{1}{8}ab(AB+BA)(S_1\circ S_2 - S_1\circ {S_2}^{-1} - S_2\circ {S_1}^{-1} + {S_1}^{-1}\circ {S_2}^{-1}).$$

Ainsi T est un élément de $\mathscr{L}(H)$, comme composé et somme d'éléments de $\mathscr{L}(H)$.

2.2.c L'existence de la matrice $M(\eta,\xi)$ se déduit de l'égalité précédente et des deux égalités de la question 2.1.c, et comme pour toute constante $\lambda\in\mathbb{C}$, toute matrice fixée $\Lambda\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et tout $u\in H_1$ on a $\mathscr{F}(\lambda u) = \lambda\mathscr{F}(u)$ et $\mathscr{F}(\Lambda u) = \Lambda\mathscr{F}(u)$, on obtient :
$M(\eta,\xi) = I_2 - ia\sin\eta A - ib\sin\xi B + a^2(\cos\eta-1)A^2 + b^2(\cos\xi-1)B^2 + \frac{ab\sin\eta\sin\xi}{2}(AB+BA).$

2.3 Étude de la stabilité du schéma

2.3.a Les matrices A,B,A^2,B^2 et $AB+BA$ sont symétriques donc $M(\eta,\xi)$ est symétrique, et on a $M(\eta,\xi) = R(\eta,\xi) + iJ(\eta,\xi)$, où les matrices $R(\eta,\xi)$ et $J(\eta,\xi)$ sont réelles symétriques, définies par :
$R(\eta,\xi) = I_2 + a^2(\cos\eta-1)A^2 + b^2(\cos\xi-1)B^2 + \frac{ab\sin\eta\sin\xi}{2}(AB+BA).$
$J(\eta,\xi) = -a\sin\eta A - b\sin\xi B.$

2.3.b Soit $x \in \mathbb{C}^2$. On a $2C = -2a^2(\cos\eta - 1)A^2 - 2b^2(\cos\xi - 1)B^2 - ab\sin\eta\sin\xi(AB+BA)$ et $J^2 = a^2\sin^2\eta A + b^2\sin^2\xi B + ab\sin\eta\sin\xi(AB+BA)$. Donc

$$2C - J^2 = a^2(1-\cos\eta)^2A^2 + b^2(1-\cos\xi)^2B^2. \tag{1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ de norme 1, on a $\langle x, Jx\rangle^2 \leqslant ||Jx||^2$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, or J est symétrique, donc $||Jx||^2 = \langle x, J^2x\rangle$ (de même en remplaçant J par A ou par B).
En appliquant l'égalité (1) à $-x$, puis en prenant le produit scalaire par x des deux côtés de l'égalité, puis l'inégalité $\langle x, Jx\rangle^2 \leqslant \langle x, J^2x\rangle$, on obtient

$$\langle x, Jx\rangle^2 - 2\langle x, Cx\rangle \leqslant -a^2(1-\cos\eta)^2||Ax||_2^2 - b^2(1-\cos\xi)^2||Bx||_2^2.$$

2.3.c On a $|\langle x, Cx\rangle| \leqslant a^2(1-\cos\eta)|\langle x, A^2x\rangle| + b^2(1-\cos\xi)|\langle x, B^2x\rangle| + \dfrac{ab}{2}|\sin\eta\sin\xi\langle x, (AB+BA)x\rangle|$.
Or on a $\langle x, A^2x\rangle = ||Ax||_2^2$ et $\langle x, B^2x\rangle = ||Bx||_2^2$.
De plus $\dfrac{ab}{2}|\sin\eta\sin\xi\langle x, (AB+BA)x\rangle| \leqslant ab|\sin\eta\sin\xi|\ ||Ax||_2||Bx||_2 \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2\sin^2\eta||Ax||_2^2 + b^2\sin^2\xi||Bx||_2^2\right)$.
Or $\dfrac{\sin^2\eta}{2} \leqslant 1-\cos\eta$ et $\dfrac{\sin^2\xi}{2} \leqslant 1-\cos\xi$.
Donc

$$|\langle x, Cx\rangle| \leqslant 2(1-\cos\eta)a^2||Ax||_2^2 + 2(1-\cos\xi)b^2||Bx||_2^2. \tag{2}$$

Cette inéquation élevée au carré fournit $\langle x, Cx\rangle^2 \leqslant 4\big((1-\cos\eta)a^2||Ax||_2^2 + (1-\cos\xi)b^2||Bx||_2^2\big)^2$.
Et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\langle x, Cx\rangle^2 \leqslant 4\big((1-\cos\eta)^2a^2||Ax||_2^2 + (1-\cos\xi)^2b^2||Bx||_2^2\big)\left(a^2||Ax||_2^2 + b^2||Bx||_2^2\right).$$

2.3.d Pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ de norme 1, sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy, on a $a^2||Ax||_2^2 + b^2||Bx||_2^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Donc d'après la dernière inégalité de la question précédente on a

$$\langle x, Cx\rangle^2 \leqslant (1-\cos\eta)^2a^2||Ax||_2^2 + (1-\cos\xi)^2b^2||Bx||_2^2$$

2.3.e On a, pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ de norme 1, $|\langle x, M(\eta,\xi)x\rangle|^2 = |\langle x, x - Cx + iJx\rangle|^2 = (1 - \langle x, Cx\rangle)^2 + \langle x, Jx\rangle^2 = 1 - 2\langle x, Cx\rangle + \langle x, Cx\rangle^2 + \langle x, Jx\rangle^2$.
2.3.f En combinant dans l'égalité précédente, les inégalités obtenues en questions 2.3b. et 2.3.d. on obtient pour tout $(\eta,\xi) \in]0, 2\pi[^2$, et tout „$x \in \mathbb{C}^2$ de norme 1, $|\langle x, M(\eta,\xi)x\rangle|^2 \leqslant 1$, donc $\omega\big(M(\eta,\xi)\big) \leqslant 1$.
Et d'après 1.3.f. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall(\eta,\xi) \in]0, 2\pi[^2$, $\omega\big(M(\eta,\xi)^n\big) \leqslant 1$.

3 Le théorème de Toeplitz-Hausdorff

3.1 Étude de l'image numérique en dimension 2

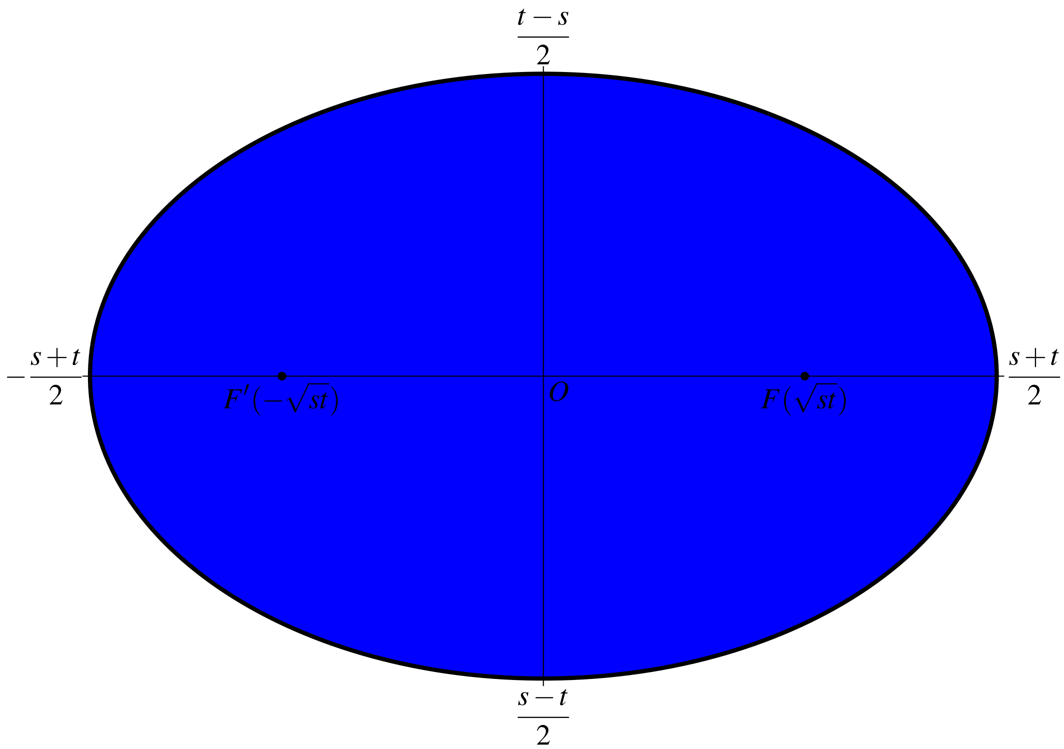
3.1.a La sphère unité de $\mathbb{C}^2$ peut se paramétrer de la façon suivante : $\big(re^{i\psi}, \sqrt{1-r^2}e^{i\tau}\big)$, où $r \in [0,1]$ et $\psi, \tau \in [0, 2\pi]$.
Pour tout $X \in \mathbb{C}^2$ et tout $\psi \in [0, 2\pi]$ on a $(e^{i\psi}X)^\star M(e^{i\psi}X) = X^\star MX$.
De plus on peut remplacer le paramètre $r \in [0,1]$ par $\cos(\varphi)$, où φ parcourt $[0, \pi/2]$.
Donc $W(M) = \{\langle x_{\theta,\varphi}, Mx_{\theta,\varphi}\rangle \mid (\theta,\varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]\}$.

3.1.b Pour tout $(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi/2]$ on a $\langle x_{\theta,\varphi}, M(0,s,t,0)x_{\theta,\varphi}\rangle = \dfrac{\sin(2\varphi)}{2}(se^{i\theta}+te^{-i\theta})$.

Ainsi, si $t\neq s$, $W\big(M(0,s,t,0)\big)$ est le disque elliptique de centre 0 et dont les axes sont de longueurs $s+t$ et $t-s$.

Les valeurs propres de $M(0,s,t,0)$, $-\sqrt{st}$ et $\sqrt{st}$, sont les affixes des foyers de l'ellipse $\partial W\big(M(0,s,t,0)\big)$.

Voici une représentation graphique de $W\big(M(0,s,t,0)\big)$:



Dans le cas où $s=t$, $W\big(M(0,s,s,0)\big)$ est le segment $[-s,s]$.

Si $s=0$ et $t>0$ alors $W\big(M(0,0,t,0)\big)$ est le disque de centre 0 et de rayon $t/2$.

3.1.c Lorsque $0\leqslant t\leqslant s$, on a $M(0,s,t,0)=M(0,t,s,0)^\star$.

Et d'après la question 1.1.e on a $W\big(M(0,s,t,0)\big)=\overline{W\big(M(0,t,s,0)\big)}$.

Or $\overline{W\big(M(0,t,s,0)\big)}=W\big(M(0,t,s,0)\big)$, car le disque et le disque elliptique (éventuellement dégénéré) obtenus dans la question précédente sont invariants par symétrie par l'axe des abscisses.

3.1.d Posons $\sigma=|\sigma|e^{i\theta}$, $\tau=|\tau|e^{i\phi}$.

Soit $R(u)$ la matrice unitaire $R(u)=\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{iu}\end{pmatrix}$, avec $u\in\mathbb{R}$.

On a $R\big((\phi-\theta)/2\big)^\star M(0,\sigma,\tau,0)R\big((\phi-\theta)/2\big)=e^{i(\phi+\theta)/2}M(0,|\sigma|,|\tau|,0)$.

D'après la question 1.1.d, on a $W\big(e^{i(\phi+\theta)/2}M(0,|\sigma|,|\tau|,0)\big)=W\big(M(0,\sigma,\tau,0)\big)$, c'est-à-dire une rotation de disque elliptique, disque ou segment trouvés dans les deux questions précédentes.

Les valeurs propres de $M(0,\sigma,\tau,0)$, $\pm\sqrt{|\sigma\tau|}e^{i(\phi+\theta)/2}$, représentent, comme dans les deux questions précédentes, les affixes des foyers de l'ellipse.

3.1.e Si T n'a qu'une seule valeur propre, celle-ci est 0. Écartons le cas trivial $T=0$, on a $T^2=0$, et il existe $x\in H$ tel que $Tx\neq 0$, ainsi la famille $\{Tx,x\}$ est libre, c'est donc une base de H. Sans perte de généralité on peut prendre x tel que $||Tx||=1$. Si x n'est pas orthogonal à Tx, on pose $y=Tx-\dfrac{1}{\langle Tx,x\rangle}x$ puis $z=y/||y||$.

Si x est orthogonal à Tx, on pose $z = x/||x||$.
Ainsi $\{Tx, z\}$ est une base orthonormée de H dans laquelle la matrice de T est de la forme $M(0,\sigma,0,0)$.
Si T admet deux valeurs propres distinctes, alors elles sont opposées, notons les $\pm\lambda$. Soient x,y deux vecteurs propres unitaires associés aux valeurs propres λ et $-\lambda$. Notons $u = x-y$ et $v = x+y$ puis $w = u/||u||$ et $t = v/||v||$. Ainsi $\{w,t\}$ est une base orthonormée de H dans laquelle la matrice de T est de la forme $M(0,\sigma,\tau,0)$.

3.1.f Soit $T \in \mathscr{L}(H)$, on a $T = T - \mathrm{tr}(T)I + \mathrm{tr}(T)I$. D'après la question 1.1.d on a $W(T) = W\big(T - \mathrm{tr}(T)I\big) + \mathrm{tr}(T)$. Et d'après la question 1.2.a. et les questions 3.1.d. et 3.1.e. on a montré le théorème de Toeplitz-Hausdorff lorsque H est de dimension 2.

3.2 Une preuve du thèoréme de Toeplitz-Hausdorff

3.2.a L'ensemble V est convexe, fermé et H est un espace de Hilbert, donc le théorème de projection sur un convexe fermé justifie l'existence de P_V.

3.2.b Soit $x \in V$ unitaire, on a $\langle x, tx\rangle = \langle P_V{}^{\star}x, Tx\rangle = \langle P_V x, Tx\rangle = \langle x, Tx\rangle$.
Donc l'image nuérique de la restriction $P_V \circ T$ à V est incluse dans celle de T.

3.2.c Si $z_1 \neq z_2$, alors la famille $\{x_1, x_2\}$ est libre.
D'après 3.1.f, on a $\{\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2, \lambda \in [0,1]\} \subset W(P_V \circ T)$ et d'après la question précédente, on a $W(P_V \circ T) \subset W(T)$, donc $W(T)$ est convexe.

3.3 Une application du théorème de Toeplitz-Hausdorff

3.3.a Notons λ_i les valeurs propres de T, d'ordre de multiplicité α_i, pour $i \in [\![1,\ell]\!]$. D'après 1.1.a les λ_i appartiennent à $W(T)$, qui est convexe, donc $0 = \dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \lambda_i \in W(T)$.

3.3.b Si $d = 1$ le résultat est immédiat. Supposons $d > 1$ et le résultat vrai au rang $d-1$. Il existe un vecteur unitaire e_1 tel que $\langle e_1, Te_1\rangle = 0$. On complète $\{e_1\}$ pour former une base orthonormée de H de tel sorte que la matrice de T s'écrit sous la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & N & \\ * & & & \end{pmatrix}$. La matrice N représente un endomorphisme, V, dans une base orthonormée d'une espace, K, de dimention $d-1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à V, il existe une base orthonormée de K, $\{f_2, \ldots, f_d\}$, de tel sorte que la matrice de V tous ses coefficients diagonaux nuls.
Finalement $\{e_1, f_2, \ldots, f_d\}$ est une base orthonormée de H dans laquelle la matrice de T a tous ses coefficients diagonaux nuls.

3.3.c Soit M une matrice complexe de taille $d \times d$ de trace nulle. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{C}^d$ dont M est la matrice dans la base canonique, $\mathscr{C}$. D'après la question précédente, il existe une base orthonormée de $\mathbb{C}^d$, $\mathscr{B}$, dans laquelle la matrice de T a tous ses coefficients diagonaux nuls. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est unitaire. Donc M est unitairement semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.

4 Inclusion spectrale et rayon numérique

4.1 Une caractérisation d'inversibilité

4.1.a L'application T étant linéaire $\operatorname{Im} T$ est un sous-espace vectoriel de H. Donnons deux démonstration de son caractère fermé.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans H. Alors $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et par la propriété $(\mathscr{P})$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H, qui est complet, donc elle converge vers x et par continuité de T on a $Tx = y$, donc $\operatorname{Im} T$ est un sous-espace fermé de H.

2. Soit $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{Im} T)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite y. La suite (Tx_n) est bornée, et par la propriété $(\mathscr{P})$ la suite (x_n) est bornée. Il existe donc une suite extraite de (x_n), notée $(x_{\varphi(n)})$, qui converge faiblement vers une limite $x \in H$. Par continuité de T, la suite $(Tx_{\varphi(n)})$ converge faiblement vers Tx, donc, H étant séparé, $Tx = y$ ce qui montre que $\operatorname{Im} T$ est un sous-espace fermé de H.

4.1.b On a $x \in \operatorname{Ker} T^\star \iff T^\star x = 0 \iff T^\star x \in H^\perp \iff (\forall y \in H, \langle T^\star x, y\rangle = 0) \iff (\forall y \in H, \langle x, Ty\rangle = 0) \iff x \in (\operatorname{Im} T)^\perp$, donc $\operatorname{Ker} T^\star = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

4.1.c Si T est inversible, alors d'après un théorème de Banach, T^{-1} est continue, donc il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in H$, $||T^{-1}(x)|| \leqslant C||x||$, ce qui implique la propriété $(\mathscr{P})$. De plus, d'après la question précédente T est injectif.

Récriproquement, si $T^\star$ est injectif et T vérifie la propriété $(\mathscr{P})$, alors $\operatorname{Im} T$ est fermée, or $\operatorname{Adh}\big(\operatorname{Im} T\big) = \operatorname{Im} T^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = H$, donc T est surjectif, et par la propriété $(\mathscr{P})$, $Tx = 0$ implique $x = 0$, donc T est injectif, c'est-à-dire bijectif, et d'après un théorème de Banach, T est inversible.

4.2 Le résultat d'inclusion spectrale

4.2.a La négation de la propriété $(\mathscr{P})$ s'écrit : $\forall K > 0, \exists x \in H, \quad ||Tx|| < K||x||$. Cette assertion implique $x \neq 0$, on peut donc normaliser par $||x||$, et en spécialisant K par les valeurs $1/(n+1)$, par exemple, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in H, ||x_n|| = 1 \quad ||Tx_n|| < 1/(n+1)$.

Donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de H telle que $||Tx_n||$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4.2.b Grace à la question 1.1.d, il nous suffit de montrer que si $0 \in \operatorname{sp}(T)$ alors $0 \in \operatorname{Adh}\big(W(T)\big)$.

Supposons que $0 \in \operatorname{sp}(T)$, alors T n'est pas inversible. Deux cas peuvent se produire :

- Si T ne vérifie pas la propriété $(\mathscr{P})$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de H telle que $||Tx_n||$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc $\langle x_n, Tx_n\rangle$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui montre que $0 \in \operatorname{Adh}\big(W(T)\big)$.
- Si T vérifie la propriété $(\mathscr{P})$, alors $T^\star$ n'est pas injectif, d'après 4.1.c, donc $0 \in \operatorname{vp}(T^\star)$, donc $0 \in W(T^\star)$, ainsi $0 \in W(T)$, d'après 1.1.e.

4.3 À propos du rayon numérique

4.3.a On a $\omega(T) = \sup_{||x||=1} |\langle x, Tx\rangle| \leqslant \sup_{||x||=1}(||x|| \cdot ||Tx||) \leqslant |||T|||$.

Pour tous $x, y \in H$, on a :

$\langle x+y, T(x+y)\rangle - \langle x-y, T(x-y)\rangle + i\langle x+iy, T(x+iy)\rangle - i\langle x-iy, T(x-iy)\rangle = 4\langle y, Tx\rangle$.

Si $x+y \neq 0$ on a $|\langle x+y, T(x+y)\rangle| = ||x+y||^2 \left|\left\langle \dfrac{x+y}{||x+y||}, \dfrac{T(x+y)}{||x+y||}\right\rangle\right| \leqslant \omega(T)||x+y||^2$.

L'inégalité étant triviale si $x+y = 0$, et similaire pour les trois autres termes de l'égalité initiale, on a donc $4|\langle y, Tx\rangle| \leqslant \omega(T)(||x+y||^2 + ||x-y||^2 + ||x+iy||^2 + ||x-iy||^2)$.

Grace à l'identité du parallélogramme on obtient : $|\langle y, Tx\rangle| \leqslant \omega(T)(||x||^2 + ||y||^2)$.

Donc $|||T||| = \sup_{||x||\leqslant 1, ||y||\leqslant 1} |\langle y, Tx\rangle| \leqslant 2\omega(T)$.

4.3.b Si T est auto-adjoint, d'après la question 1.1.e on a $W(T) = \overline{W(T)}$, donc $W(T) \subset \mathbb{R}$.
Réciproquement, si $W(T) \subset \mathbb{R}$, alors pour tout $z \in H$ on a $\langle z, Tz\rangle = \overline{\langle z, Tz\rangle}$.
En écrivant l'égalité de polarisation utilisée dans la question précédente pour $\langle x, Ty\rangle$ et $\langle Tx, y\rangle$, on obtient pour tout $x, y \in H$, $\langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{\star}y\rangle$. Donc T est auto-adjoint.

4.3.c L'ensemble $W(T)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (d'après la question précédente), convexe (d'après 3.2.c) et borné (d'après 1.1.a), donc $\mathrm{Adh}\big(W(T)\big)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, convexe fermé et borné, c'est donc un intervalle de la forme $[m, M]$, avec $(m, M) \in \mathbb{R}^2$, $m \leqslant M$.
On a donc $\omega(T) = \max\{|m|, |M|\}$. Or $\omega(T) \leqslant |||T|||$ d'après 4.3.a.
De plus, comme T est auto-adjoint on a $|||T||| = \sup_{||x||\leqslant 1} |\langle x, Tx\rangle|$.
Donc $|||T||| = \max\{|m|, |M|\} = \omega(T)$.

4.3.d L'application ω est à valeur dans $\mathbb{R}_+$.
Soient $T, U \in \mathscr{L}(H)$. Pour tout $x \in H$, tel que $||x|| = 1$ on a $|\langle x, (T+U)x\rangle| \leqslant |\langle x, Tx\rangle| + |\langle x, Ux\rangle| \leqslant \omega(T) + \omega(U)$, donc $\omega(T+U) \leqslant \omega(T) + \omega(U)$.
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $T \in \mathscr{L}(H)$, on a $\omega(\lambda T) = |\lambda|\omega(T)$.
Si $\omega(T) = 0$, d'après 4.3.a on a $|||T||| = 0$, donc $T = 0$, et $\omega(0) = 0$.
Ainsi ω est une norme sur $\mathscr{L}(H)$.

4.4 Fin de la preuve de la stabilité du schéma (6)

4.4.a D'après 4.3.a on a pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $|||T^n||| \leqslant 2\omega(T^n)$.
Et d'après 2.3.f on a $\omega(T^n) \leqslant 1$, sous la condition CFL.
Ceci prouve donc l'existence de la constante $\mathscr{C}$ et donc la stabilité du schéma de Lax-Wendroff.

5 Remarques et compléments

5.1 Contexte historique

Peter Lax et Buron Wendroff furent les premiers à utiliser dans le rayon numérique pour prouver des résultats de stabilité de schémas numériques, dans leur article [5].
Le théorème d'inégalité de puissance, démontré question 1.3.f, fut conjecturé par Halmos, [3], et démontré par Berger dans [1].
On pourra consulter avec profit [2] pour aller plus loin sur ces thèmes.

5.2 Norme multiplicative ?

Après la question 4.3.d, Il est naturel de se demander si ω est une norme d'algèbre. La réponse est non, même en dimension finie. Pour s'en convaincre prenons dans $H = \mathbb{C}^4$ le block de Jordan d'ordre 4, noté A. On vérifie que $\omega(A) < 1$ et $\omega(A^2) = \omega(A^3) = 1/2$. Posons $B = A^2$, on a donc $\omega(AB) > \omega(A)\omega(B)$.
En revanche on peut facilement obtenir des norme multiplicative à l'aide de ω, comme le montre le théorème suivant :

Théorème. *Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\omega_r = r\omega$. La norme ω_r sur $\mathscr{L}(H)$ est multiplicative si et seulement si $r \geqslant 4$.*

Démonstration. Soient $r \geqslant 4$, $T, U \in \mathscr{L}(H)$. D'après la question 4.3.a, on a $\omega_r(TU) \leqslant r|||TU||| \leqslant r|||T||| \cdot |||U||| \leqslant 4r\omega(T)\omega(U) \leqslant \omega_r(T)\omega_r(U)$.

Pour montrer que la condition $r \geqslant 4$ est nécessaire il suffit de considerer dans $\mathbb{C}^2$ les endomophisme T et V dont les matrices dans la base canonique sont respectivement le block de Jordan d'ordre 2 et sa transposée. $\square$

5.3 Un théorème de Hildebrandt

D'après le théorème de Toeplitz-Hausdorff on a $\operatorname{conv}\big(\operatorname{sp}(T)\big) \subset \bigcap_{V \in \mathrm{GL}(H)} \operatorname{Adh}\big(W(VTV^{-1})\big)$. On a en fait une égalité, démontrée par Stephan Hildebrandt, [4].

Théorème. *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. L'enveloppe convexe du spectre de T est égal à* $\bigcap_{V \in \mathrm{GL}(H)} \operatorname{Adh}\big(W(VTV^{-1})\big)$.

Références

[1] C. A. Berger, *On the numerical range of powers of an operator*, Notices of the American Mathematical Society, 12 (1965), p. 590.

[2] K. E. Gustafson et D. K. M. Rao, *Numerical Range The Field of Values of Linear Operators and Matrices*, Universitext, Springer, 1997.

[3] P. Halmos, *Introduction to Hilbert Space New York*, NY : Chelsea, 1951.

[4] S. Hildebrandt, *The closure of the numerical range of an operator as spectral set.* Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), pp. 415–421.

[5] P. D. Lax et B. Wendroff, *Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy*, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), pp. 381–398.