Sujet 2 : Analyse numérique

Dans toute l'épreuve, on considère un espace de Hilbert complexe non trivial H muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On supposera le produit scalaire antilinéaire en sa première variable et linéaire en la seconde. On désigne par $\|\cdot\|$ (ou $\|\cdot\|_H$ lorsqu'il y a un risque de confusion) la norme associée à ce produit scalaire. Si V est une partie de H, on note $V^\perp$ son orthogonal et $\mathrm{Adh}(V)$ son adhérence. On note I l'application identité de H. On appelle image numérique d'un opérateur linéaire continu T de H dans H le sous-ensemble du plan complexe défini par

$$W(T) = \{\langle x, T(x) \rangle, \quad x \in H, \quad \|x\| = 1\},$$

et l'on appelle rayon numérique de T la borne supérieure, notée $w(T)$, du sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des modules des éléments de $W(T)$. Lorsque $x \in H$, on peut noter pour simplifier Tx le vecteur $T(x)$ image de x par T. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de H dans H et l'on note $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{L}(H)$ subordonnée à celle de H. On rappelle que

$$|||T||| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1,\ \|y\|\leq 1} |\langle y, Tx \rangle|.$$

Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, on note $\mathrm{Ker}\ T$ son noyau et $\mathrm{Im}\ T$ son image. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est inversible si T est une bijection de H et $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. On note $\mathrm{vp}(T)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I$ n'est pas injectif et $\mathrm{sp}(T)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I$ n'est pas inversible. On note par ailleurs $T^\star$ l'unique élément de $\mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle x, Ty \rangle = \langle T^\star x, y \rangle.$$

L'opérateur $T^\star$ est appelé l'adjoint de T.

Pour tout entier $d \in \mathbb{N}^\star$, on munit $\mathbb{C}^d$ du produit scalaire hermitien canonique, noté $(\cdot, \cdot)$, et l'on note $\|\cdot\|_d$ la norme associée. Pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{C}^d$, on note X^t le vecteur ligne obtenu en transposant X et $X^\star$ le vecteur ligne (appelé transconjugué de X) obtenu en remplaçant chaque élément de X^t par son nombre complexe conjugué. Pour toute matrice carrée M à coefficients complexes de taille $d \times d$, on note $M^\star$ sa transconjuguée : c'est l'unique matrice carrée complexe de taille $d \times d$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^d, \qquad (x, My) = (M^\star x, y).$$

Enfin, on appelle image numérique d'une telle matrice M l'ensemble

$$W(M) = \{X^\star M X, \quad X \in \mathbb{C}^d, \quad \|X\|_d = 1\},$$

et l'on appelle rayon numérique de M la borne supérieure, notée $w(M)$, de l'ensemble des modules des éléments de $W(M)$.

Ce problème a pour objet l'étude de certaines propriétés de l'image numérique et du rayon numérique d'un opérateur linéaire continu et il s'intéresse également à quelques applications. Il se compose de quatre parties. La première partie propose de prouver quelques généralités concernant image et rayon numériques d'un opérateur. On montre notamment à la fin de la partie 1 un résultat d'inégalité de puissance que l'on utilise dans la partie 2 afin de préparer la preuve de la stabilité d'un schéma de Lax-Wendroff appliqué à un système hyperbolique linéaire posé sur $\mathbb{R}^2$. La troisième partie se focalise sur la démonstration du théorème de Toeplitz-Hausdorff et en donne une application. Enfin, la dernière partie porte sur la démonstration d'un théorème d'inclusion spectrale que l'on a admis pour traiter les parties 1 et 2 et elle s'achève avec quelques dernières propriétés concernant le rayon numérique qui permettent notamment de conclure, *in fine*, à la stabilité du schéma défini dans la partie 2.

Les parties 1 et 2 sont assez peu indépendantes et les candidats sont invités à traiter les questions dans l'ordre, quitte à admettre le cas échéant les résultats des questions qu'ils n'auraient pas traitées intégralement afin de les utiliser dans la suite de l'épreuve. Les parties 3 et 4 sont, dans une large mesure, indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Dans les parties 1 et 2 (et uniquement dans ces deux parties), on admet le résultat d'inclusion spectrale suivant, qui sera démontré indépendamment dans la partie 4 : pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, le spectre $\mathrm{sp}(T)$ de T est inclus dans l'adhérence de l'image numérique de T, c'est-à-dire

$$\mathrm{sp}(T) \subset \mathrm{Adh}(W(T)). \tag{1}$$

1 Généralités concernant image et rayon numériques

Le but de cette partie est de démontrer quelques résultats préliminaires qui seront utiles pour la suite de l'épreuve.

1.1 Quelques généralités

On considère un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$.

1.1.a Justifier que $W(T)$ est un ensemble borné non vide contenant $\mathrm{vp}(T)$.

1.1.b En déduire que le rayon numérique $w(T)$ est un nombre réel positif ou nul.

1.1.c Justifier que $W(T)$ est compact lorsque H est de dimension finie.

1.1.d Justifier que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $W(\alpha T + \beta I) = \alpha W(T) + \beta$.

1.1.e Justifier que $W(T^\star) = \overline{W(T)}$.

1.2 Lien avec l'image numérique matricielle

On suppose que H est de dimension finie $d \in \mathbb{N}^\star$.

1.2.a Soit M la matrice de T dans une base orthonormée de H. Montrer que

$$W(T) = W(M).$$

1.2.b Montrer que la relation précédente n'est pas vraie en général lorsque l'on écrit la matrice M de T dans une base de H qui n'est pas orthonormée. On pourra fournir un contre-exemple dans le cas où H est de dimension $d = 2$.

1.3 Le théorème d'inégalité de puissance

Le but de cette question est de montrer que si T est un opérateur dont le rayon numérique est au plus 1, alors il en est de même de toutes les puissances positives de T. On rappelle que l'on admet le résultat (1) dans les parties 1 et 2 de ce problème. On note D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $\mathrm{Re} z$ sa partie réelle et $\mathrm{Im} z$ sa partie imaginaire.

1.3.a Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $w(T) \leq 1$ si et seulement si pour tout $z \in D$ et tout $x \in H$, $\mathrm{Re}\,\langle x, (I - zT)x\rangle \geq 0$.

1.3.b Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(T) \leq 1$ et $z \in D$. Montrer que $I - zT$ est inversible.

1.3.c Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(T) \leq 1$. Montrer que

$$\Big(\forall z \in D,\ \forall x \in H,\ \mathrm{Re}\,\langle x, (I - zT)x\rangle \geq 0\Big) \iff \Big(\forall z \in D,\ \forall y \in H,\ \mathrm{Re}\left\langle y, (I - zT)^{-1}y\right\rangle \geq 0\Big).$$

1.3.d On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et l'on note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Justifier que, dans le corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients complexes, on a

$$\frac{1}{1 - X^n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k X}. \tag{2}$$

En déduire que, dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients complexes, on a

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n-1} (1 - \omega^j X). \tag{3}$$

1.3.e On fixe encore $n \in \mathbb{N}^\star$ et l'on note toujours $\omega = e^{2i\pi/n}$. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(T) \leq 1$ et soit $z \in D$. Justifier que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $I - \omega^k zT$ est inversible, et que $I - z^n T^n$ l'est également. Montrer ensuite que

$$(I - z^n T^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (I - \omega^k zT)^{-1}. \tag{4}$$

1.3.f Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $w(T) \leq 1$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad w(T^n) \leq 1.$$

2 Application à la stabilité d'un schéma de Lax-Wendroff

Le but de cette partie est d'appliquer le théorème d'inégalité de puissance démontré dans la partie 1 pour préparer la preuve de la stabilité d'un schéma de Lax-Wendroff pour un système hyperbolique linéaire en dimension 2.

2.1 Une transformation de Fourier

Dans cette partie, on note $H_1 = \ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^2)$ et $H_2 = L^2(]0, 2\pi[^2, \mathbb{C}^2)$. On note u^1 et u^2 les composantes de $u \in H_1$. De même, on note f^1 et f^2 les composantes de $f \in H_2$. Pour $(u, v) \in H_1^2$ et $(f, g) \in H_2^2$, on définit les produits scalaires

$$\langle u, v\rangle_1 = \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} (\overline{u^1_{k,l}} v^1_{k,l} + \overline{u^2_{k,l}} v^2_{k,l}),$$

et

$$\langle f, g\rangle_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (\overline{f^1} g^1 + \overline{f^2} g^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On notera $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{H_2}$ les normes respectives associées. Pour $u \in H_1$ tel que u^1 et u^2 ont un support fini, on définit une fonction de H_2 en posant

$$\forall (\eta, \xi) \in]0, 2\pi[^2, \quad \mathcal{F}(u)(\eta, \xi) = \Big(\sum_{k,l \in \mathbb{Z}^2} u^1_{k,l} e^{-ik\eta - il\xi}, \sum_{k,l \in \mathbb{Z}^2} u^2_{k,l} e^{-ik\eta - il\xi} \Big)^t.$$

On note de plus S_1 et S_2 les opérateurs de H_1 définis par

$$\forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2, \quad \big[S_1(u)\big]_{k,l} = (u^1_{k+1,l}, u^2_{k+1,l})^t \qquad \text{et} \qquad \big[S_2(u)\big]_{k,l} = (u^1_{k,l+1}, u^2_{k,l+1})^t.$$

2.1.a Vérifier que S_1 et S_2 sont des bijections isométriques de H_1. Préciser leurs inverses.

2.1.b Montrer que $\mathcal{F}$ s'étend de manière unique en une isométrie de H_1 dans H_2. On note encore $\mathcal{F}$ cette extension. Montrer que $\mathcal{F}$ est une bijection de H_1 dans H_2.

2.1.c Pour $u \in H_1$, exprimer $\mathcal{F}(S_1(u))$ et $\mathcal{F}(S_2(u))$ en fonction de $\mathcal{F}(u)$.

2.2 Un schéma de Lax-Wendroff pour un système hyperbolique linéaire

On se donne une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ indéfiniment dérivable et à support compact, ainsi que deux matrices symétriques réelles A et B de taille 2×2. On considère le problème de Cauchy suivant : trouver une fonction z de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ indéfiniment dérivable telle que

$$\begin{cases} \partial_t z(t,x,y) = A \partial_x z(t,x,y) + B \partial_y z(t,x,y) & (t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \\ z(0,x,y) = f(x,y) & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{5}$$

On admet que ce problème de Cauchy possède une unique solution.

2.2.a On fixe $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}^2$. Montrer que, lorsque $h \in \mathbb{R}$ tend vers 0, on a

$$z(t+h,x,y) = z(t,x,y) + h\big(A\partial_x z(t,x,y) + B\partial_y z(t,x,y)\big)$$
$$+ \frac{h^2}{2}\big(A^2 \partial_x^2 z(t,x,y) + (AB+BA)\partial_x \partial_y z(t,x,y) + B^2 \partial_y^2 z(t,x,y)\big) + \mathcal{O}(h^3).$$

Afin de calculer des valeurs approchées de la solution, on considère le schéma de Lax-Wendroff suivant. On se donne trois constantes de discrétisation $\Delta t, \Delta x$ et Δy strictement positives, et l'on définit les points

$$\forall (j,k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2, \quad t^j = j\Delta t, \ x_k = k\Delta x \text{ et } y_l = l\Delta y.$$

On définit la condition initiale $z^0 \in H_1$ en posant

$$\forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2, \quad z^0_{k,l} = (f^1(x_k,y_l), f^2(x_k,y_l))^t.$$

On pose

$$a = \frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\Delta t}{\Delta y}.$$

Lorsque $z^m \in H_1$ est connue pour un certain $m \in \mathbb{N}$, on définit $z^{m+1} = T(z^m)$ par la formule

$$\begin{aligned} z^{m+1}_{k,l} = z^m_{k,l} &+ \frac{1}{2} aA(z^m_{k+1,l} - z^m_{k-1,l}) + \frac{1}{2} bB(z^m_{k,l+1} - z^m_{k,l-1}) \\ &+ \frac{1}{2} a^2 A^2 (z^m_{k+1,l} - 2z^m_{k,l} + z^m_{k-1,l}) + \frac{1}{2} b^2 B^2 (z^m_{k,l+1} - 2z^m_{k,l} + z^m_{k,l-1}) \\ &+ \frac{1}{8} ab(AB+BA)(z^m_{k+1,l+1} - z^m_{k+1,l-1} - z^m_{k-1,l+1} + z^m_{k-1,l-1}). \end{aligned} \tag{6}$$

2.2.b Écrire l'application T à l'aide de a, b, A et B, ainsi que de S_1, S_2 et leurs inverses. En déduire que $T \in \mathcal{L}(H_1)$.

2.2.c En déduire l'existence d'une matrice $M(\eta, \xi)$ de taille 2×2 à coefficients complexes, dépendant de a, b, A, B, η, ξ telle que

$$\forall u \in H_1, \quad \mathcal{F}(T(u))(\eta, \xi) = M(\eta, \xi)\mathcal{F}(u)(\eta, \xi),$$

pour presque tout $(\eta, \xi) \in]0, 2\pi[^2$. On explicitera la matrice $M(\eta, \xi)$.

2.3 Étude de la stabilité du schéma

On souhaite montrer que, sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy

$$a^2 w^2(A) + b^2 w^2(B) \leq \frac{1}{4}, \tag{7}$$

le schéma de Lax-Wendroff est stable au sens suivant : il existe une constante $\mathcal{C} > 0$ telle que

$$\forall z \in H_1,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \|T^n z\|_{H_1} \leq \mathcal{C} \|z\|_{H_1}. \tag{8}$$

On effectue l'essentiel de la preuve de ce résultat de stabilité dans cette question. La conclusion sera apportée à la question 4.4.a.

2.3.a Montrer qu'il existe deux matrices symétriques réelles $R(\eta, \xi)$ et $J(\eta, \xi)$ dépendant de a, b, A, B, η, ξ telles que

$$M(\eta, \xi) = R(\eta, \xi) + iJ(\eta, \xi).$$

On explicitera ces deux matrices.

2.3.b Posons $C(\eta, \xi) = I_2 - R(\eta, \xi)$ (où I_2 est la matrice identité de taille 2×2). Dans toute la suite de cette question 2.3, on note désormais R (respectivement J, respectivement C) les matrices $R(\eta, \xi)$, (resp. $J(\eta, \xi)$, resp. $C(\eta, \xi)$) afin d'alléger les notations. Montrer que

$$2C - J^2 = a^2(1 - \cos\eta)^2 A^2 + b^2(1 - \cos\xi)^2 B^2.$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ de norme 1,

$$(x, Jx)^2 - 2\,(x, Cx) \leq -a^2(1 - \cos\eta)^2 \|Ax\|_2^2 - b^2(1 - \cos\xi)^2 \|Bx\|_2^2.$$

2.3.c Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^2$,

$$|\,(x, Cx)\,| \leq 2(1 - \cos\eta)a^2 \|Ax\|_2^2 + 2(1 - \cos\xi)b^2 \|Bx\|_2^2.$$

En déduire que

$$(x, Cx)^2 \leq 4\big((1 - \cos\eta)^2 a^2 \|Ax\|_2^2 + (1 - \cos\xi)^2 b^2 \|Bx\|_2^2\big)\big(a^2 \|Ax\|_2^2 + b^2 \|Bx\|_2^2\big).$$

2.3.d Sous la condition (7), montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ de norme 1, on a

$$(x, Cx)^2 \leq (1 - \cos\eta)^2 a^2 \|Ax\|_2^2 + (1 - \cos\xi)^2 b^2 \|Bx\|_2^2.$$

2.3.e Pour $x \in \mathbb{C}^2$ de norme 1, montrer que

$$|\,(x, M(\eta, \xi)x)\,|^2 = 1 + (x, Cx)^2 - 2\,(x, Cx) + (x, Jx)^2.$$

2.3.f En déduire que pour tout $(\eta, \xi) \in]0, 2\pi[^2$, $w(M(\eta, \xi)) \leq 1$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall (\eta, \xi) \in]0, 2\pi[^2 \quad w(M(\eta, \xi)^n) \leq 1.$$

3 Le théorème de Toeplitz-Hausdorff

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème : Pout tout $T \in \mathcal{L}(H)$, l'ensemble $W(T)$ est une partie convexe de $\mathbb{C}$.

3.1 Étude de l'image numérique en dimension 2

On suppose dans cette question que l'espace H est de dimension 2. Pour tout $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$, on note $x_{\theta,\varphi}$ le vecteur de $\mathbb{C}^2$ défini par $(\cos(\varphi), e^{i\theta}\sin(\varphi))^t$. Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, on note

$$M(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3.1.a Soit M une matrice carrée complexe de taille 2×2. Montrer que

$$W(M) = \{\, (x_{\theta,\varphi}, Mx_{\theta,\varphi}) \quad | \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]\}.$$

3.1.b On suppose que s, t sont deux nombres réels strictement positifs. Décrire l'image numérique de la matrice $M(0, s, t, 0)$ lorsque $s \le t$. Quel rôle jouent les valeurs propres de $M(0, s, t, 0)$ pour $W(M(0, s, t, 0))$? Faire une représentation graphique de $W(M(0, s, t, 0))$ sur laquelle on placera les valeurs propres de la matrice. Que se passe-il lorsque $s = 0$ et $t > 0$?

3.1.c En déduire $W(M(0, s, t, 0))$ lorsque $0 \le t \le s$.

3.1.d Soit $(\sigma, \tau) \in \mathbb{C}^2$. Déduire de ce qui précède l'image numérique de $M(0, \sigma, \tau, 0)$. On pourra en particulier utiliser le résultat de la question **1.1.d**. On fera une représentation graphique et on explicitera le rôle des valeurs propres de la matrice $M(0, \sigma, \tau, 0)$ vis-à-vis de $W(M(0, \sigma, \tau, 0))$.

3.1.e Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ de trace nulle. Montrer qu'il existe une base orthonormée de H et deux nombres complexes σ et τ tels que la matrice de T dans cette base soit $M(0, \sigma, \tau, 0)$. En déduire l'image numérique de T.

3.1.f En déduire le théorème de Toeplitz-Hausdorff lorsque H est de dimension 2.

3.2 Une preuve du théorème de Toeplitz-Hausdorff

On revient dans cette question au cas général : $T \in \mathcal{L}(H)$ et H n'est plus nécessairement de dimension finie *a priori*. Soient z_1 et z_2 deux éléments de $W(T)$. On considère deux vecteurs unitaires x_1 et x_2 de H tels que $\langle x_1, Tx_1\rangle = z_1$ et $\langle x_2, Tx_2\rangle = z_2$. On note V le sous-espace de H engendré par x_1 et x_2.

3.2.a Justifier de l'existence de l'opérateur P_V de projection orthogonale de H sur V.

3.2.b Montrer que l'image numérique de la restriction t de $P_V \circ T$ à V est incluse dans celle de T.

3.2.c En déduire que $W(T)$ est convexe.

3.3 Une application du théorème de Toeplitz-Hausdorff

On considère dans cette partie que l'espace H est de dimension $d \in \mathbb{N}^\star$. Soit T un opérateur de trace nulle.

3.3.a Montrer que $0 \in W(T)$. On pourra utiliser le résultat de la question 1.1.a et le théorème de Toeplitz-Hausdorff.

3.3.b En déduire qu'il existe une base orthonormée de H dans laquelle la matrice de T a tous ses coefficients diagonaux nuls. On pourra raisonner par récurrence sur d.

3.3.c En déduire que toute matrice complexe de taille $d \times d$ de trace nulle est unitairement semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.

4 Inclusion spectrale et rayon numérique

Dans cette partie, on souhaite montrer le résultat d'inclusion spectrale (1) que l'on a admis pour traiter les parties 1 et 2, et également quelques propriétés supplémentaires concernant le rayon numérique. On rappelle qu'un sous-espace F de H est dense dans H si et seulement si son orthogonal $F^\perp$ est réduit au vecteur nul de H. On fixe $T \in \mathcal{L}(H)$.

4.1 Une caractérisation d'inversibilité

On dit que T vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in H, \qquad \|x\| \leq C \|Tx\| .$$

4.1.a On suppose que T vérifie la propriété $(\mathcal{P})$. Montrer que $\operatorname{Im} T$ est un sous-espace fermé de H.

4.1.b Montrer que

$$\text{Ker } T^\star = (\text{Im T})^\perp.$$

4.1.c Montrer que T est inversible si et seulement si $T^\star$ est injectif et T vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

4.2 Le résultat d'inclusion spectrale

À l'aide de la caractérisation d'inversibilité démontrée à la question 4.1, on montre le résultat (1).

4.2.a On suppose que T ne vérifie pas la propriété $(\mathcal{P})$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de H telle que $\|Tx_n\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4.2.b On ne suppose plus *a priori* que T ne vérifie pas la propriété $(\mathcal{P})$. Montrer que

$$\text{sp}(T) \subset \text{Adh}(W(T)).$$

4.3 À propos du rayon numérique

On propose la preuve de quelques propriétés supplémentaires relatives au rayon numérique.

4.3.a Montrer que

$$w(T) \leq |||T||| \leq 2w(T).$$

On pourra utiliser une formule de polarisation.

4.3.b En déduire que T est auto-adjoint si et seulement si $W(T) \subset \mathbb{R}$.

4.3.c On suppose que T est auto-adjoint. Justifier qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m \leq M$ et $\mathrm{Adh}(W(T)) = [m, M]$. Montrer que dans ce cas,

$$|||T||| = \max\{|m|, |M|\} = w(T).$$

4.3.d Montrer que w est une norme sur $\mathcal{L}(H)$.

4.4 Fin de la preuve de la stabilité du schéma (6)

Le résultat d'inclusion spectrale (1) a été démontré en 4.2. Les résultats des parties 1 et 2 sont donc acquis. On peut finalement montrer la propriété de stabilité annoncée pour le schéma introduit dans la partie 2.

4.4.a À l'aide des résultats des questions 2.1, 2.3 et 4.3, conclure quant à la stabilité du schéma de Lax-Wendroff (6) appliqué au problème (5) sous la condition (7), en montrant l'existence d'un $\mathcal{C}$ vérifiant (8).

fin de l'épreuve